**Chapitre 3**

# Les nombres en écriture fractionnaire

## 1. Vocabulaire

### a) Quotient exact

**Définition 1 :** Le quotient exact de la division du nombre $a$ par le nombre non nul $b$ s'écrit sous forme fractionnaire : $\frac{a}{b}$

**Définition 2 :** Si $a$ et $b$ sont des entiers naturels ($b$ non nul), alors on dit que $\frac{a}{b}$ est une fraction, a est le numérateur et b est le dénominateur de la fraction.

**Exemples :** $\frac{8}{5}$ et $\frac{4}{7}$ sont des fractions, mais $\frac{2,3}{6}$ n'est pas une fraction, mais un nombre en écriture fractionnaire.

### b) Écriture décimale. Quotient approché

- Lorsque la division de $a$ par $b$ s'arrête, le quotient exact a une écriture décimale limitée ; c'est un nombre décimal. Par exemple, $\frac{8}{5} = 1,6$
- Lorsque la division de $a$ par $b$ ne s'arrête pas, le quotient exact a une écriture décimale illimitée ; ce n'est pas un nombre décimal.

  Par exemple, $\frac{4}{7} = 0,571428571428571...$ Donc le quotient exact n'a pas d'écriture décimale (limitée). On garde l'écriture fractionnaire pour désigner le quotient exact.
- Le quotient approché de 4 par 7 arrondi au centième près est $\frac{4}{7} \approx 0,57$ .
- On obtient un encadrement du quotient approché de 4 par 7 au centième près :

$$0,57 < \frac{4}{7} < 0,58$$

## 2. Egalité des quotients

### a) Egalité des quotients

**Règle fondamentale 1 :** On ne change pas un quotient lorsqu'on multiplie (ou on divise) son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

Autrement dit, pour tout nombre relatif a et tous nombres relatifs b et k non nuls, on a :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}}$$

Ceci nous permet d'obtenir beaucoup d'écritures fractionnaires différentes d'un même nombre. On cherche alors la fraction la plus simple.

Exemple : A = $\frac{4}{3,5} = \frac{4 \times 10}{3,5 \times 10} = \frac{40}{35} = \frac{40 \div 5}{35 \div 5} = \frac{8}{7}$.

On dit que $\frac{8}{7}$ est une fraction simple ou une fraction irréductible.

### b) Cas particuliers très importants

Pour tout nombre a différent de 0, on a les égalités suivantes : $\boxed{\frac{a}{a} = 1}$ et $\boxed{\frac{a}{1} = a}$

Exemple : $\boxed{\frac{5}{5} = 5 : 5 = 1}$ et $\boxed{5 = 5 : 1 = \frac{5}{1}}$

### b) Conséquence : division par un nombre décimal

Pour effectuer à la main la division par un nombre décimal, on commence par transformer le diviseur en un nombre entier : Pour cela, on multiplie le diviseur et le dividende par 10, par 100 ou par 1000,…

Exemple : 15,68 : 2,4 = $\frac{15,68}{2,4} = \frac{15,68 \times 10}{2,4 \times 10} = \frac{156,8}{24}$ = 6,533… qu'on peut tronquer au 100$^{e}$.

### b) Dénominateur commun

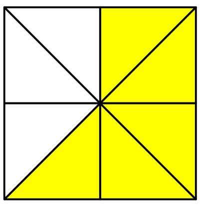
Pour trouver un dénominateur commun aux deux fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{12}$ on cherche un nombre entier multiple commun des deux dénominateurs. Or, 12 est déjà un multiple de 3. Donc $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$ est une fraction qui a le même dénominateur que $\frac{5}{12}$.

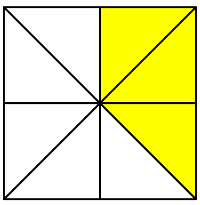
## 3. Comparaison des fractions

### Avec un même dénominateur

Comparer $\frac{5}{8}$ et $\frac{3}{8}$.

On voit que : $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$





**Règle 2 :** Si deux nombres fractionnaires ont le même dénominateur, alors le plus petit des deux est celui qui a le plus petit numérateur.

**Autrement dit :** si deux nombres fractionnaires ont le même dénominateur, alors on peut les ranger dans le même ordre que leurs numérateurs.

Donc, pour tous nombres décimaux a et b et tout nombre $d \neq 0$, on a :

$$\boxed{\frac{a}{d} < \frac{b}{d} \quad \text{équivaut à} \quad a < b}$$

**Exemple :** Comparer $\frac{5}{8}$ et $\frac{3}{8}$.

Ces deux fractions ont le même dénominateur. Comme 5 > 3, on a $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$

### b) Avec des dénominateurs différents

**Règle 2bis :** Si deux nombres fractionnaires n'ont pas le même dénominateur, alors on commence par les écrire avec un dénominateur commun, puis on les range dans le même ordre que leurs (nouveaux) numérateurs.

**Exemple :** Comparer $\frac{5}{8}$ et $\frac{3}{4}$.

8 est un multiple de 4. Donc 8 est un dénominateur commun possible.

$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$. Comme 5 < 6, on a : $\frac{5}{8} < \frac{6}{8}$. Donc $\boxed{\frac{5}{8} < \frac{3}{4}}$.

### c) Avec le même numérateur

**Règle 3 :** Si deux nombres en écriture fractionnaire ont le même numérateur, alors ils sont rangés dans l'ordre inverse de leurs dénominateurs.

**Exemple :** Comparer $\frac{5}{7}$ et $\frac{5}{4}$.

Ces deux fractions ont le même dénominateur et 7 > 4. Donc $\boxed{\frac{5}{7} < \frac{5}{4}}$.

### d) Comparaison à l'unité

On sait déjà que Pour tout nombre $a \neq 0$, on a les égalités : $\boxed{\frac{a}{a} = 1}$ et $\boxed{\frac{a}{1} = a}$

Donc si on veut comparer un nombre en écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ avec 1, il suffit d'écrire $1 = \frac{b}{b}$. Ce qui revient à comparer le numérateur et le dénominateur.

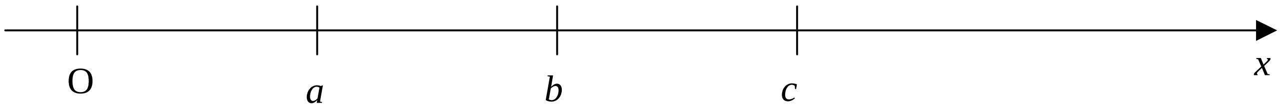
**Règle 4 :**
– Une fraction est plus petite que **1** si son numérateur est plus petit que son dénominateur.
– Une fraction est plus grande que **1** si son numérateur est plus grand que dénominateur.

**Exemple :** Comparer $\frac{51}{57}$ et 1 puis $\frac{63}{48}$ et 1.

$1 = \frac{57}{57}$. Comme 51 < 57, on a : $\frac{51}{57} < 1$. De même, $1 = \frac{48}{48}$. Comme 63 > 48, on a : $\frac{63}{48} > 1$.

### e) Sur une droite graduée. Règle de transitivité.

**Règle 5** : Si a, b et c sont trois nombres tels que : a < b et b < c, alors a < c.




**Exemple** : Comparer $\frac{51}{57}$, $\frac{63}{48}$.

On remarque que $\frac{51}{57} < 1$ et $\frac{63}{48} > 1$ qu'on peut aussi écrire $1 < \frac{63}{48}$.

Donc, d'après la règle de transitivité : $\frac{51}{57} < 1 < \frac{63}{48}$. Par conséquent : $\boxed{\frac{51}{57} < \frac{63}{48}}$.

### f ) Comparaison à la calculatrice

Exemple : Comparer $\frac{51}{57}$, $\frac{63}{48}$.

A la calculatrice, on a : $\frac{51}{57}$ = 0,8947… et $\frac{63}{48}$ = 1,3125.

En comparant les partie entières, on constate que : $\boxed{\frac{51}{57} < \frac{63}{48}}$.

# 4. Opérations sur les nombres fractionnaires

## a) Addition et soustraction

**<u>1er cas : Avec un même dénominateur</u>**

**Règle 6.** Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écriture fractionnaire de même dénominateur :

- On additionne (ou on soustrait) les numérateurs ;
- On conserve le dénominateur commun ;
- Puis on simplifie le résultat.

Pour tous nombres décimaux a et b et tout nombre d différent de 0, on a :

$$\boxed{\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}}$$

**2ème cas : <u>Avec des dénominateurs différents</u>**

**Règle 6bis.** Pour additionner (ou soustraire) deux fractions de dénominateurs différents, il faut chercher d'abord un dénominateur commun, puis appliquer le 1er cas.

Exemple 1 : Calculer A = $\frac{7}{12}+\frac{3}{12}$ et donner le résultat sou la forme de fraction simple.

On est dans le 1er cas. Les deux fractions ont le même dénominateur 12. On a alors :

A = $\frac{7}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7+3}{12}=\frac{10}{12}$. Puis, il faut simplifier le résultat : A = $\frac{10}{12}=\frac{10\div 2}{12\div 2}=\boxed{\frac{5}{6}}$

Exemple 2 : Calculer B = $\frac{7}{12}-\frac{1}{3}$ et donner le résultat sou la forme de fraction simple.

On est dans le 2ème cas. 12 est un multiple de 3. Donc 12 est un dénominateur commun. On a alors

A = $\frac{7}{12}-\frac{1}{3}=\frac{7}{12}-\frac{1\times 4}{3\times 4}=\frac{7}{12}-\frac{4}{12}=\frac{7-4}{12}=\frac{3}{12}$. Puis, on simplifie : A = $\frac{3}{12}=\frac{3\div 3}{12\div 3}=\boxed{\frac{1}{4}}$

Exemple 3 : Calculer C = $\frac{49}{35}+\frac{9}{15}$ et donner le résultat sou la forme de fraction simple.

Ici, aucun des deux dénominateurs n'est multiple de l'autre. Mais, je peux simplifier chaque fraction.

$\frac{49}{35}=\frac{49\div 7}{35\div 7}=\frac{7}{5}$ et $\frac{9}{15}=\frac{9\div 3}{15\div 3}=\frac{3}{5}$. Donc C = $\frac{49}{35}+\frac{9}{15}=\frac{7}{5}+\frac{3}{5}=\frac{7+3}{5}=\frac{10}{5}=\boxed{2}$

## b) Multiplication des fractions

**Règle 7 :** Pour multiplier deux nombres relatifs en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, en respectant la règle des signes.

$$\boxed{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}}$$

**Remarque :** Attention ! Il est vivement conseillé de décomposer le numérateur et le dénominateur pour simplifier AVANT d'effectuer les calculs.

**Exemple 1 :** Calculer A = $\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}$ et donner le résultat sous la forme d'une fraction simple.

A = $\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{2\times4}{3\times7}$ = $\boxed{\frac{8}{21}}$ est une fraction simple.

**Exemple 2 :** Calculer B = $\frac{5}{12}\times9$ et donner le résultat sous la forme d'une fraction simple.

Attention ! Ne pas oublier d'écrire $9=\frac{9}{1}$. On a alors

B = $\frac{5}{12}\times9=\frac{5}{12}\times\frac{9}{1}=\frac{5\times9}{12\times1}=\frac{5\times3\times\cancel{3}}{4\times\cancel{3}\times1}=\frac{5\times3}{4\times1}=\boxed{\frac{15}{4}}$.

**Exemple 3 :** Calculer C = $\frac{9}{35}\times\frac{14}{27}$ et donner le résultat sous la forme d'une fraction simple.
Attention, ici, il faut décomposer le numérateur et le dénominateur pour simplifier AVANT d'effectuer les calculs !

C = $\frac{9}{35}\times\frac{14}{27}=\frac{9\times14}{35\times27}=\frac{\cancel{9}\times\cancel{7}\times2}{\cancel{7}\times5\times\cancel{9}\times3}=\frac{2}{5\times3}$ Donc : $\boxed{C=\frac{2}{15}}$

## c) Règles de priorité des opérations et fractions

Rappel : *Dans une suite de calculs sur les nombres en écriture fractionnaires, on applique les mêmes règles de priorité des opérations. Autrement dit, on effectue dans l'ordre :*

*1°) Les opérations entre parenthèses en commençant par les parenthèses les plus « intérieures » ;*

*2°) Les multiplications et les divisions dans l'ordre où elles se présentent ;*

*3°) Et enfin les additions et les soustractions dans l'ordre où elles se présentent.*

**Exemple :** Calculer A = $\frac{7}{5}+\frac{4}{15}\times\frac{3}{2}$ puis B = $\left(\frac{7}{5}+\frac{4}{15}\right)\times\frac{3}{2}$ et donner les résultats sous la forme de fractions simples.

Dans le calcul de A, la multiplication est prioritaire.

A = $\frac{7}{5}+\frac{4}{15}\times\frac{3}{2}=\frac{7}{5}+\frac{4\times3}{15\times2}=\frac{7}{5}+\frac{\cancel{2}\times2\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times5\times\cancel{2}}=\frac{7}{5}+\frac{2}{5}=\frac{7+2}{5}=\boxed{\frac{9}{5}}$

Dans le calcul de B, l'opération entre parenthèses est prioritaire.

B = $\left(\frac{7}{5}+\frac{4}{15}\right)\times\frac{3}{2}=\left(\frac{7\times3}{5\times3}+\frac{4}{15}\right)\times\frac{3}{2}=\left(\frac{21}{15}+\frac{4}{15}\right)\times\frac{3}{2}=\frac{25}{15}\times\frac{3}{2}=\frac{25\times3}{15\times2}=\frac{\cancel{5}\times5\times\cancel{3}}{\cancel{5}\times\cancel{3}\times2}=\boxed{\frac{5}{2}}$

## d) Fraction d'une quantité

Pour calculer une fraction $\frac{3}{5}$ du nombre 350 , on multiplie 350 par $\frac{3}{5}$.

$$\frac{3}{5} \text{ de } 350 = \frac{3}{5} \times 350 = \frac{3}{5} \times \frac{350}{1} = \frac{3}{5} \times \frac{350}{1} = \frac{3 \times 350}{5 \times 1} = \frac{3 \times \cancel{5} \times 70}{\cancel{5} \times 1} = \frac{210}{1} = 210.$$

Plus généralement :

**Règle 8 :** Pour calculer une fraction $\frac{a}{b}$ du nombre N , on multiplie N par $\frac{a}{b}$.

$$\boxed{\frac{a}{b} \text{ de } N = \frac{a}{b} \times N = \frac{a}{b} \times \frac{N}{1}}$$

## d) Fraction d'une fraction

**Exemple :** Deux cents candidats se sont présentés à un examen qui se déroulait en deux parties. Les trois-quarts des candidats étaient **admissibles**, c'est-à-dire ils ont réussi la première partie (l'écrit) de cet examen. Le tiers de ceux-ci sont **admis**, c'est-à-dire ils ont réussi la seconde partie (l'oral) de cet examen.

1°) Quelle fraction de l'ensemble des candidats représente ceux qui ont été définitivement reçus ?

2°) Combien y a-t-il eu de candidats définitivement reçus ?

1°) Les $\frac{3}{4}$ des candidats sont admissibles. Et le $\frac{1}{3}$ des candidats admissibles sont admis.

Donc la fraction des candidats admis est :

$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{1}{3} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{\cancel{3} \times 1}{5 \times \cancel{3}} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

Un cinquième des candidats sont admis.

2°) <u>Je n'utilise pas la réponse à la 1ère question.</u>

Je calcule directement : $\frac{3}{4}$ de 200 = $\frac{3}{4} \times 200 = \frac{3}{4} \times \frac{200}{1} = \frac{3 \times \cancel{4} \times 50}{\cancel{4} \times 1}$ = 3x50 = 150.

Donc, il y a 150 candidats admissibles.

Puis je calcule : $\frac{1}{3}$ de 150 = $\frac{1}{3} \times 150 = \frac{1}{3} \times \frac{150}{1} = \frac{1 \times \cancel{3} \times 50}{\cancel{3} \times 1}$ = 50.

Conclusion : 50 candidats sont admis.