Chapitre 5

Trigonométrie dans le triangle rectangle

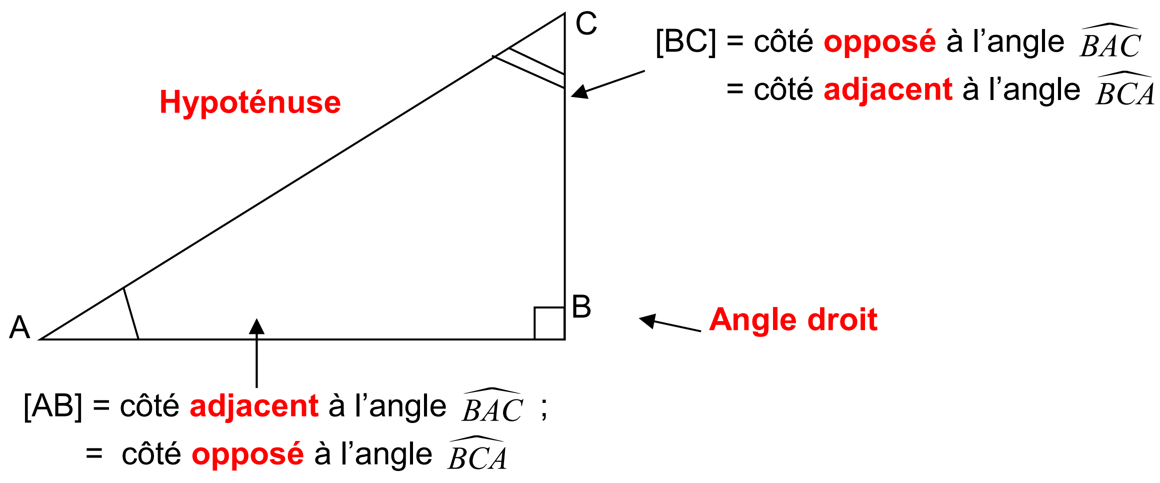
I. Introduction

Trigonométrie, définition du Larousse :
(du grec *trigônon,* triangle)
▶**nom féminin**
MATHÉMATIQUES Étude des propriétés des angles et des arcs (sinus, cosinus, tangente, etc.).
Elle permet de calculer les mesures des côtés d'un triangle ou de ses angles à partir de certaines d'entre elles, notamment en astronomie ou en topographie.

II. Description d'un triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en B. Donc l'**hypoténuse** est le côté [AC]. Les deux autres côtés forment l'angle droit.

- Si on se place au sommet de l'angle $\widehat{BAC}$, alors [AB] est le côté **adjacent** et [BC] est le côté **opposé** à cet angle $\widehat{BAC}$.
- De même, Si on se place au sommet de l'angle $\widehat{BCA}$, alors [BC] est le côté **adjacent** et [AB] est le côté **opposé** à cet angle $\widehat{BCA}$.



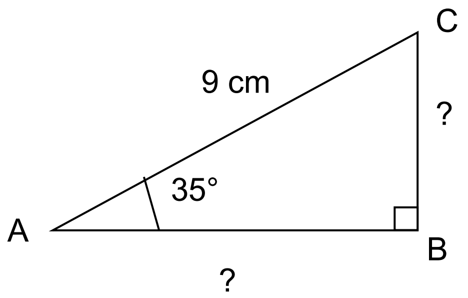
III. Etude d'un exemple

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que AC = 9 cm et $\widehat{BAC}$ = 35°. Calculer des valeurs approchées de AB et BC arrondies au dixième.

a) Calcul de AB

Le triangle ABC est rectangle en B où l'hypoténuse AC = 9 cm et l'angle aigu $\widehat{BAC}$ = 35°.
Le côté adjacent à $\widehat{BAC}$ est [AB]. Donc, par définition du cosinus, on a :

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{BAC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$



Donc : $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC}$

Avec les valeurs : $\cos 35° = \frac{AB}{9}$

En écrivant l'égalité des produits en croix, on obtient :

AB = 9 x cos 35°

A la calculatrice, on vérifie d'abord qu'elle est en mode degré, matérialisé à l'écran par un « D » ou un « DEG », on tape successivement sur les touches :

9 x cos 35 puis EXE ou =

On obtient : **7,372368399**…qu'on arrondit au dixième est :

AB $\simeq$ 7,4 cm

<u>a) Calcul de BC</u>

Le triangle ABC est rectangle en B et l'angle aigu $\widehat{BAC}$ = 35°. Or on sait que :

Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires.

Donc, $\widehat{BAC} + \widehat{BCA}$ = 90°, donc 35° + $\widehat{BCA}$ = 90°, donc $\widehat{BCA}$ = 90°– 35°.

Par conséquent $\widehat{BCA}$ = 55°. Maintenant qu'on connaît l'angle C, on applique de nouveau le cosinus. Le côté adjacent à $\widehat{BCA}$ est [BC]. Donc, par définition du cosinus, on a :

$$\cos \widehat{BCA} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{BCA}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

Donc : $\cos \widehat{BCA} = \frac{BC}{AC}$

Avec les valeurs : $\cos 55° = \frac{BC}{9}$

En écrivant l'égalité des produits en croix, on obtient :

BC = 9 x cos 55°

A la calculatrice, on vérifie aussi qu'elle est en mode degré, matérialisé à l'écran par un « D » ou un « DEG », on tape successivement sur les touches :

9 x cos 55 puis EXE ou =

On obtient : **5,162187927**…qu'on arrondit au dixième est :

BC $\simeq$ 5,2 cm

Remarque :

Une fois qu'on a calculé AC, on aurait pu utiliser le théorème de Pythagore pour calculer BC. Mais nous ne disposons que d'une valeur approchée de AC. Et si on utilise cette valeur approchée, on va multiplier les erreurs, on risque donc de s'éloigner peu à peu de la valeur exacte. C'est pour cela qu'il est préférable de « recommencer » le calcul avec les valeurs exactes, puis arrondir.

III. Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $\widehat{A} = \widehat{BAC}$. De même que nous avons défini en 4ème, le cosinus d'un angle aigu, nous allons définir le sinus et la tangente d'un angle aigu.

1°) Définition

Dans un triangle rectangle :

- Le **cosinus** d'un angle aigu est égal au rapport de la longueur du côté **adjacent** à cet angle par la longueur de l'hypoténuse exprimés dans la même unité :

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse.}}$$

- Le **sinus** d'un angle aigu est égal au rapport de la longueur du côté **opposé** à cet angle par la longueur de l'hypoténuse exprimés dans la même unité :

$$\sin \widehat{BAC} = \frac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse.}}$$

- La **tangente** d'un angle aigu est égal au rapport de la longueur du côté **opposé** à cet angle par la longueur du côté **adjacent** exprimés dans la même unité **:**

$$\tan \widehat{BAC} = \frac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur du côté adjacent}}$$

Autrement dit :

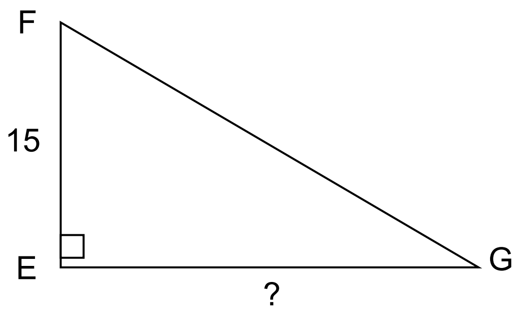
$\cos \widehat{BAC} = \dfrac{AB}{AC}$, $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC}$

et $\tan \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB}$

Ces trois rapports, sont **des nombres sans unité** et ne dépendent pas des longueurs des côtés du triangle choisi, mais **ils dépendent uniquement de la mesure de l'angle aigu** $\widehat{BAC}$.

2°) Exemple

Soit EFG un triangle rectangle en E tel que $\widehat{EFG} = 50°$ et EF = 15 cm. Calculer une valeur approchée de EG au dixième près.



Le triangle EFG est rectangle en E tel que $\widehat{EFG} = 50°$ et EF = 15 cm. Son hypoténuse est [FG].

« Je connais le côté adjacent et je cherche à calculer le côté opposé »

TOA ⟶ j'utilise la tangente.

Le triangle EFG un rectangle en E tel que $\widehat{EFG} = 50°$ et EF = 15 cm. Donc, par définition de la tangente d'un angle aigu, on a :

$$\tan \widehat{EFG} = \frac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur du côté adjacent}}$$

$$\tan \widehat{EFG} = \frac{EG}{EF}$$

Avec les valeurs : $\tan 50° = \frac{EG}{15}$

En écrivant l'égalité des produits en croix, on obtient :

EG = 15 x tan 50°

A la calculatrice, on vérifie aussi qu'elle est en mode degré, matérialisé à l'écran par un « D » ou un « DEG », on tape successivement sur les touches :

15 x tan 50 puis EXE ou =

On obtient : **17,87630389**…qu'on arrondit au dixième est :

BC ≃ 17,9 cm

3°) Propriétés

Propriété n°1 :

Dans un triangle rectangle, quel que soit la mesure x d'un angle aigu, le sinus et le cosinus de x sont des nombres positifs compris entre 0 et 1. C'est-à-dire :

$0 < \cos x < 1$ et $0 < \sin x < 1$

En effet, dans un triangle rectangle, les longueurs des côtés adjacent et opposé à un angle aigu sont forcément plus petites que la longueur de l'hypoténuse.

Propriété n°2 :

Dans un triangle rectangle, quel que soit la mesure x d'un angle aigu, la tangente de x est égale au quotient du sinus par le cosinus de cet angle. C'est-à-dire :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Propriété n°3 : Relation fondamentale de la trigonométrie (RFT) :

Dans un triangle rectangle, quel que soit la mesure x d'un angle aigu, la somme des carrés du sinus et du cosinus est égale à 1. C'est-à-dire :

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

Démonstrations :

Propriété n°1.

Soit ABC un triangle rectangle en B. Son hypoténuse est [AC]. On pose $x = \widehat{BAC}$, donc $\cos x = \frac{AB}{AC}$ et $\sin x = \frac{BC}{AC}$.

Comme [AC] est l'hypoténuse, on a : $AB < AC$ et $BC < AC$.

Donc : $0 < \frac{AB}{AC} < 1$ donc : $0 < \cos x = \frac{AB}{AC} < 1$. De même $0 < \frac{BC}{AC} < 1$ donc : $0 < \sin x = \frac{BC}{AC} < 1$.

D'où la propriété n°1.

Propriété n°2.

On a aussi : $\tan x = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{AC} \times \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin x}{\cos x}$

D'où la propriété n°2.

Propriété n°3.

Le triangle ABC est rectangle en B. Son hypoténuse est [AC]. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2.$$

En divisant les deux membres de cette égalité par AC², on obtient :

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = 1 \quad \text{donc} \quad \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 1.$$

Ce qui donne : $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

D'où la propriété n°3.

Exemple

Soit ABC un triangle rectangle et x un angle aigu tel que $\cos x = \frac{5}{6}$. Calculer les valeurs exactes de sin x puis tan x.

ABC un triangle rectangle et x un angle aigu tel que $\cos x = \frac{5}{6}$. Donc d'après la relation fondamentale de la trigonométrie, on a :

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

Donc $$\left(\frac{5}{6}\right)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

Donc $$\frac{25}{36} + (\sin x)^2 = 1$$

Donc $$(\sin x)^2 = 1 - \frac{25}{36}$$

Donc $$(\sin x)^2 = \frac{11}{36}$$

Donc $$\sin x = \sqrt{\frac{11}{36}} \quad \text{ou} \quad \sin x = -\sqrt{\frac{11}{36}}$$

Or, x est un angle aigu, donc 0 < sin x < 1. Par conséquent :

$$\sin x = \sqrt{\frac{11}{36}}$$

On simplifie, donc : $$\boxed{\sin x = \frac{\sqrt{11}}{6}}$$

D'autre part, , x est un angle aigu, donc on a

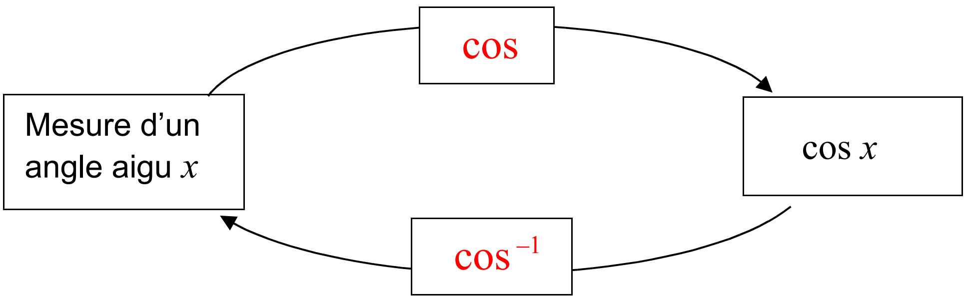
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Donc $$\tan x = \frac{\frac{\sqrt{11}}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{11}}{\cancel{6}} \times \frac{\cancel{6}}{5} = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

Conclusion : $$\boxed{\tan x = \frac{\sqrt{11}}{5}}$$

IV. Calcul de la mesure d'un angle aigu

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $\hat{A} = \widehat{BAC}$.



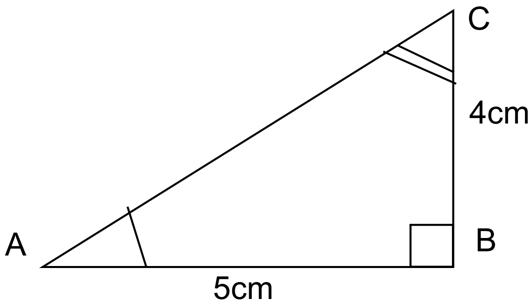
Dans un triangle rectangle, si on connaît les longueurs de deux côtés, alors on peut calculer le sinus, le cosinus ou la tangente d'un angle aigu de ce triangle. En utilisant les ***touches inverses*** de sinus, cosinus ou tangente, on peut donc calculer *une valeur approchée* de la mesure de cet angle aigu.
Pour obtenir les opérations inverses, on utilise les touches : 2nde ou Seconde ou encore INV suivies de sin , cos ou tan.

Exemple

ABC est un triangle rectangle en B tel que AB = 5cm et BC = 4cm.

a) Calculer *une valeur approchée* de la mesure de l'angle aigu $\widehat{BAC}$, arrondi au degré près.

b) En déduire *une valeur approchée* de la mesure de l'angle aigu $\widehat{BCA}$, arrondi au degré près.



a) Le triangle ABC est rectangle en B. Et on connaît les longueurs des deux côtés de l'angle droit : le côté adjacent et le côté opposé de l'angle aigu $\widehat{BAC}$. Donc, par définition de la tangente, on a :

$$\tan \widehat{BAC} = \frac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur du côté adjacent}}$$

Donc : $$\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}$$

Donc : $$\tan \widehat{BAC} = \frac{4}{5}$$

C'est ici qu'on applique l'opération « inverse de tangente » :

Avec les touches **INV** et **TAN** on obtient :

$$\widehat{BAC} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$$

A la calculatrice, on obtient : $\widehat{BAC} = 38{,}65980825...$

Donc $$\boxed{\widehat{BAC} \simeq 39^\circ}$$

b) Le triangle ABC est rectangle en B. Donc, ses deux angles aigus sont complémentaires.
Donc $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 90^\circ$. Donc $39^\circ + \widehat{BCA} = 90^\circ$. Donc $\widehat{BCA} = 90^\circ - 39^\circ$. Par conséquent :

$$\boxed{\widehat{BCA} \simeq 51^\circ}$$