

Chapitre 1

Calculs numériques

Rappels de 4ème

1. Les fractions

1.1. Quotient exact

Définition 1 : Le **quotient exact** de la division du nombre a par le nombre non nul b s'écrit sous forme fractionnaire : $\frac{a}{b}$ (a est le numérateur, b est le dénominateur).

Définition 2 : Si a et b sont **des entiers relatifs** (b non nul), on dit que $\frac{a}{b}$ est une fraction.

Exemples : $\frac{8}{5}$ et $\frac{4}{7}$ sont des fractions, mais $\frac{2,3}{6}$ n'est pas une fraction, mais un nombre en écriture fractionnaire.

1.2. Écriture décimale. Quotient approché

- Lorsque la division de a par b s'arrête, le **quotient exact** a une écriture décimale limitée ; c'est un **nombre décimal**. Par exemple, $\frac{8}{5} = 1,6$
- Lorsque la division de a par b ne s'arrête pas, le quotient exact a une écriture décimale illimitée ; **ce n'est pas un nombre décimal**.

Par exemple, $\frac{4}{7} = 0,571428571428571\dots$ Donc le quotient exact n'a pas d'écriture décimale. On garde l'écriture fractionnaire pour représenter le quotient exact.

- Le **quotient approché de 4 par 7 arrondi au centième près** est $\frac{4}{7} \approx 0,57$.
- On obtient l'encadrement du quotient approché de 4 par 7 au centième près :
$$0,57 < \frac{4}{7} < 0,58$$
- 0,57 est le **quotient approché de 4 par 7 au centième près par défaut** et 0,58 est le **quotient approché de 4 par 7 au centième près par excès**.

1.3. Égalité des fractions

Règle 1 : Deux fractions sont égales lorsqu'il y a égalité des produits en croix.

Autrement dit :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ équivaut à } ad = bc$$

Règle 2 : On ne change pas un nombre relatif en écriture fractionnaire en multipliant (ou en divisant) son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

Autrement dit, pour tout nombre relatif a et tous nombres relatifs non nuls b et k , on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Ceci nous permet d'obtenir différentes écritures fractionnaires d'un même nombre. On cherche alors **la fraction la plus simple**.

Exemples : $A = \frac{4}{3,5} = \frac{4 \times 10}{3,5 \times 10} = \frac{40}{35} = \frac{40 \div 5}{35 \div 5} = \frac{8}{7}$

$\frac{8}{7}$ est une **fraction simple** ou **irréductible**.

1.4. Règle des signes

Règle 2 : Le signe du quotient $\frac{a}{b}$ de deux nombres relatifs est le même que le signe du produit ab .

On obtient la règle des signes :

Le quotient de deux nombres de même signe est positif.

Le quotient de deux nombres de signes contraires est négatif.

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

1.5. Comparaison des fractions

Règle 3 : 1°) Si deux fractions ont le même dénominateur positif, alors on les range dans le même ordre que leurs numérateurs. Autrement dit, pour tous nombres relatifs a et c et tout nombre relatif $d > 0$, on a

$$\frac{a}{d} > \frac{c}{d} \text{ équivaut à } a > c$$

2°) Si deux fractions n'ont pas le même dénominateur positif, on cherche d'abord un dénominateur commun positif, puis on applique le 1°).

1.6. Addition et soustraction

Règle 4. 1^{er} cas : Pour additionner (ou soustraire) deux fractions de même dénominateur, il faut additionner (ou soustraire) les numérateurs et conserver le dénominateur commun.

$$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d} \quad \text{et} \quad \frac{a}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{d}$$

2^{ème} cas : Pour additionner (ou soustraire) deux fractions de dénominateurs différents, il faut chercher d'abord un dénominateur commun, puis appliquer le 1^{er} cas.

Exemple : Calculer $A = \frac{-5}{8} - \frac{-7}{12}$. On est dans le 2^{ème} cas. On cherche un dénominateur

commun. On écrit :

On cherche dans la table de 8, le premier nombre multiple de 12, ou l'inverse.

Table de 8 : 8 ; 16 ; 24 est aussi un multiple de 12

Ou Table de 12 : 12 ; 24 est aussi un multiple de 8

On a alors :

$$A = \frac{-5}{8} - \frac{-7}{12} = \frac{-5 \times 3}{8 \times 3} - \frac{7 \times 2}{12 \times 2} = \frac{-15}{24} - \frac{7}{24} = \frac{-15-7}{24} = \frac{-22}{24}$$

Puis, il faut simplifier $A = \frac{-22 \div 2}{24 \div 2} = \frac{-11}{12}$

1.7. Multiplication des fractions

Règle 5 : Pour multiplier deux nombres relatifs en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, en respectant la règle des signes.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Remarque : Attention ! Il est vivement conseillé de décomposer le numérateur et le dénominateur pour **simplifier AVANT d'effectuer les calculs**.

Exemple : Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction simple : $A = \frac{-9}{35} \times \frac{-14}{-27}$

D'abord, il y a trois signes moins, donc A est négatif. Puis, on a :

$$A = \frac{-9}{35} \times \frac{-14}{-27} = -\frac{9 \times 14}{35 \times 27} = -\frac{\cancel{9} \times \cancel{7} \times 2}{\cancel{7} \times 5 \times \cancel{9} \times 3} = -\frac{2}{15} \quad \text{Donc : } A = -\frac{2}{15}$$

1.8. Inverse d'un nombre relatif

Définition : Deux nombres relatifs sont **inverses** si leur produit est égal à 1.

Si x et x' sont des nombres relatifs non nuls, alors x' est l'inverse de x si et seulement

si $x \times x' = 1$. L'inverse d'un nombre relatif non nul x est le nombre $\frac{1}{x}$ noté aussi x^{-1} .

Remarques : - 0 n'a pas d'inverse !

- Un nombre relatif et son inverse sont obligatoirement de même signe.
- Si x est un nombre relatif non nul, alors l'inverse de son inverse est égal à lui-même.
- Si a et b sont deux nombres non nuls, l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

On a alors les propriétés suivantes, pour tous les nombres relatifs a , b et x non nuls :

$$\boxed{x \times \frac{1}{x} = 1} \quad \boxed{\frac{1}{x} \times x = 1} \quad , \quad \boxed{\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{b}{a}}$$

1.9. Division des fractions

Règle 6 : Pour diviser par un nombre relatif (non nul), on multiplie par son inverse.

Donc, pour tous nombres relatifs a et b non nuls, on a

$$\boxed{a \div b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}}$$

En particulier, si a , b , c et d sont quatre nombres relatifs non nuls, comme l'inverse de $\frac{c}{d}$ s'écrit $\frac{1}{\frac{c}{d}}$ et est égal à $\frac{d}{c}$, on a les égalités suivantes :

$$\boxed{\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}$$

Attention à la position du « trait centrale de fraction » et à la place du signe égal.

Exemple : Calculer $A = \frac{\frac{3}{8} - \frac{7}{12}}{\frac{10}{16}}$. On calcule d'abord le numérateur.

$$A = \frac{\frac{3 \times 3}{8 \times 3} - \frac{7 \times 2}{12 \times 2}}{\frac{10}{16}}$$

$$A = \frac{\frac{9}{24} - \frac{14}{24}}{\frac{10}{16}}$$

$$A = \frac{-\frac{5}{24}}{\frac{10}{16}}$$

$$A = \frac{-5}{24} \div \frac{10}{16}$$

$$A = \frac{-5}{24} \times \frac{16}{10}$$

$$A = \frac{-5 \times 16}{24 \times 10}$$

$$A = \frac{\cancel{-5} \times \cancel{8} \times \cancel{2}}{\cancel{8} \times 3 \times \cancel{5} \times \cancel{2}}$$

$$\boxed{A = -\frac{1}{3}}$$

