# Calcul des probabilités
# Conditionnement & indépendance

## Ce que dit le programme :

| CONTENUS | CAPACITÉS ATTENDUES | COMMENTAIRES |
|---|---|---|
| Conditionnement par un événement de probabilité non nulle.<br><br>Notation $P_A(B)$ . | • Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée.<br><br>• Exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités.<br><br>• Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers. | On représente une situation à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau. On énonce et on justifie les règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés. Un arbre pondéré correctement construit constitue une preuve.<br><br>Le vocabulaire lié à la formule des probabilités totales n'est pas un attendu du programme, mais la mise en oeuvre de cette formule doit être maîtrisée. |
| Indépendance de deux événements. | • Démontrer que si deux événements $A$ et $B$ sont indépendants, alors il en est de même pour $\overline{A}$ et $B$ . | Cette partie du programme se prête particulièrement à l'étude de situations concrètes.<br>• Des activités algorithmiques sont menées dans ce cadre, notamment pour simuler une marche aléatoire.<br>• [SVT] Hérédité, génétique, risque génétique. |

# I. Probabilités conditionnelles

## 1.1) Étude d'un exemple.

On considère *l'univers* $\Omega$ formé des trente élèves de la classe de Terminale S. L'*expérience aléatoire* consiste à choisir un élève au hasard dans cette classe. On considère les deux événements suivants :

$\boldsymbol{A}$ = « l'élève choisi fait de l'allemand en LV1 » ; $\overline{A}$ est l'événement contraire.

$\boldsymbol{F}$ = « l'élève choisi est une fille » ; $\overline{F}$ est l'événement contraire.

Chacun de ces deux caractères partage $\Omega$ en deux parties : $A$ et $\overline{A}$ ainsi que F et $\overline{F}$ . On obtient le tableau des effectifs suivants :

| | $F$ | $\overline{F}$ | Totaux |
|---|---|---|---|
| $A$ | 10 | 7 | **17** |
| $\overline{A}$ | 4 | 9 | 13 |
| Totaux | **14** | 16 | **30** |

Chaque élève a exactement la même chance d'être choisi. Nous sommes donc en situation d'équiprobabilité :

– La probabilité que l'élève choisi fasse de l'allemand est donnée par :
$$P(A)=\frac{Nombre\ d'issues\ favorables}{Nombre\ d'issues\ possibles}=\frac{card\ A}{card\ \Omega}=\frac{17}{30}$$
– La probabilité que l'élève choisi soit une fille est donnée par :
$$P(F)=\frac{Nombre\ d'issues\ favorables}{Nombre\ d'issues\ possibles}=\frac{card\ F}{card\ \Omega}=\frac{14}{30}$$

Maintenant, On choisit au hasard un élève qui fait allemand en LV1. Calculer la probabilité que ce soit une fille.

***On change d'univers*** : Le nouvel univers est $A$. L'élève choisi est donc dans $A \cap F$

| | $F$ | $\overline{F}$ | Totaux |
|---|---|---|---|
| $A$ | 10 | 7 | **17** |
| $\overline{A}$ | 4 | 9 | 13 |
| Totaux | 14 | 16 | 30 |

- « On choisit un élève qui fait allemand en LV1 », la probabilité que cet élève soit une fille, notée $P_A(F)$, est donnée par :

$$P_A(F) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables}}{\text{Nombre d'issues possibles}} = \frac{card\ A \cap F}{card\ A} = \frac{10}{17}$$

On peut encore écrire $P_A(F)$, de la façon suivante :

$$P_A(F) = \frac{card\ A \cap F}{card\ \Omega} \times \frac{card\ \Omega}{card\ A} = P(A \cap F) \times \frac{1}{P(A)}$$

ou encore :

$$P_A(F) = \frac{P(A \cap F)}{P(A)}$$

Conclusion : On peut exprimer « la probabilité de F, sachant que A est réalisé » comme quotient de $P(A \cap F)$ et de $P(A)$ .

## 1.2) Définition de la probabilité conditionnelle

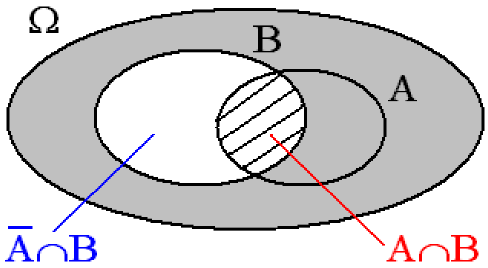
**Définition** :
Soit $\Omega$ ***un ensemble fini*** et $P$ une loi de probabilité sur l'univers $\Omega$ liée à une expérience aléatoire. Soit A et B deux événements de $\Omega$ tels que $P(B) \neq 0$ .
On définit ***la probabilité que « A soit réalisé sachant que B est réalisé*** » de la manière suivante :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ où $P_B(A)$ se lit « *P-B-de-A* »

$P_B(A)$ se notait anciennement $P(A / B)$ et se lisait « *P-de-A-sachant-B* ».

En effet, dans cette définition, « *l'univers est restreint à B* ».

- L'ensemble de toutes les *issues possibles* est égal à $B$
- L'ensemble de toutes les *issues favorables* est égal à $A \cap B$ .



**Conséquences immédiates** :

Soit A et B deux événements de $\Omega$ tels que $P(B)\neq 0$ .

i) On peut écrire toutes les probabilités comme des probabilités conditionnelles. $P(\Omega)=1$ . Donc pour tout événement A : $P(A)=P_{\Omega}(A)$ .

ii) $P_B(B)=1$ ; $P_B(\Omega)=1$ ; $P_B(\emptyset)=0$ .

iii) L'événement contraire de « *A est réalisé sachant que B est réalisé* » est « *$\overline{A}$ est réalisé sachant que B est réalisé* ». En effet, $B=(B\cap\overline{A})\cup(B\cap A)$ :

$$\boxed{P_B(\overline{A})+P_B(A)=1 \quad \text{ou encore} \quad P_B(\overline{A})=1-P_B(A)}$$

iv) Si A et C sont deux événements quelconques, on peut étendre la formule vue en Seconde aux probabilités conditionnelles :

$$\boxed{P_B(A\cup C)=P_B(A)+P_B(C)-P_B(A\cap C)}$$

v) Si A et C sont deux événements ***incompatibles***, on a :

$$\boxed{P_B(A\cup C)=P_B(A)+P_B(C)}$$

Conséquence très importante : (en écrivant l'égalité des produits en croix) :

Pour tous événements A et B de $\Omega$ tels que $P(B)\neq 0$ , on obtient ***la formule des probabilités composées*** :

$$P(A\cap B)=P_B(A)\times P(B)$$

**Exemple** :

*Dans notre exemple ci-dessus, nous avons déjà calculé :* $P_A(F)=\frac{10}{17}$ *et* $P(A)=\frac{17}{30}$ .

*On choisit un élève au hasard dans la classe de TS2. Calculer la probabilité que ce soit une fille qui fait de l'allemand. Ce qui correspond à l'événement* $A\cap F$ .

Nous avons deux méthodes d'aborder cette question :

- ***1ère méthode*** : Nous connaissons déjà les effectifs. Donc
  $P(A\cap F)=\frac{Nombre\ d'issues\ favorables}{Nombre\ d'issues\ possibles}=\frac{card\ A\cap F}{card\ \Omega}=\frac{10}{30}$
- ***2ème méthode*** : Nous appliquons la formule ci-dessus :
  $P(A\cap F)=P_A(F)\times P(A)=\frac{10}{17}\times\frac{17}{30}=\frac{10}{30}$ qu'on peut naturellement simplifier...

## 1.3) Des probabilités dans un tableau à double entrée.

On pourrait présenter les données de notre exemple sous la forme de tableau de ***fréquences*** ou de ***proportions*** ou de ***probabilités*** des différents événements :

| | $F$ | $\overline{F}$ | Totaux |
|---|---|---|---|
| $A$ | 0,33 | 0,23 | 0,56 |
| $\overline{A}$ | 0,14 | 0,3 | 0,44 |
| Totaux | 0,47 | 0,53 | 1 |

$\Leftrightarrow$

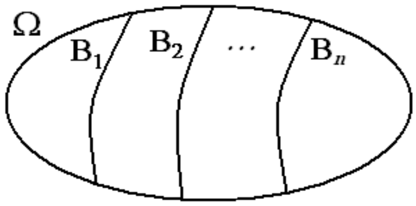
| | $F$ | $\overline{F}$ | Totaux |
|---|---|---|---|
| $A$ | $P(A\cap F)$ | $P(A\cap\overline{F})$ | $P(A)$ |
| $\overline{A}$ | $P(\overline{A}\cap F)$ | $P(\overline{A}\cap\overline{F})$ | $P(\overline{A})$ |
| Totaux | $P(F)$ | $P(\overline{F})$ | $P(\Omega)$ |

On utilise donc la formule des probabilités conditionnelles pour calculer $P_A(F)$ comme suit $P_A(F)=\frac{P(A\cap F)}{P(A)}=\frac{0{,}33}{0{,}56}\simeq 0{,}59$ et on avait déjà calculé $P_A(F)=\frac{10}{17}\simeq 0{,}59$ .

## II. Partition de l'univers

**Définition** :
Soit $\Omega$ ***un ensemble fini*** et $B_1, B_2, \ldots, B_n$ $(n\geqslant 2)$ une famille d'événements de $\Omega$ .
On dit que les $B_1, B_2, \ldots, B_n$, $(n\geqslant 2)$ ***forment*** ou ***réalisent*** ***une partition*** ou un ***système complet d'événements*** de $\Omega$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

i) Tous les $B_i$ sont non vides, c'est-à-dire : $B_i\neq\emptyset$ pour tout $i$ ; (cette condition n'est pas toujours vérifiée dans certaines démonstrations) ;
ii) Ces événements sont deux à deux incompatibles, c'est-à-dire : pour tout $i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ et tout $j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ $[\ i\neq j\Rightarrow B_i\cap B_j=\emptyset\ ]$ ;
iii) La réunion de tous ces événements est égale à $\Omega$ ; c'est-à-dire :
$$B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=\Omega\ .$$




**Exemple** :
Soit $\Omega$ = l'ensemble des élèves du lycée. On choisit un élève au hasard et on lui demande sa classe. On pose $B_1$ = « l'élève est en **seconde** », $B_2$ = « l'élève est en **première** », $B_3$ = « l'élève est en **Terminale** » et $B_4$ = « l'élève est en **BTS** », alors $B_1$, $B_2$, $B_3$ et $B_4$ forment une partition de $\Omega$ .

### Un cas particulier très important :

Soit B un événement de $\Omega$ tel que $P(B)\neq 0$ . Alors $B$ et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers $\Omega$ $(n=2)$.

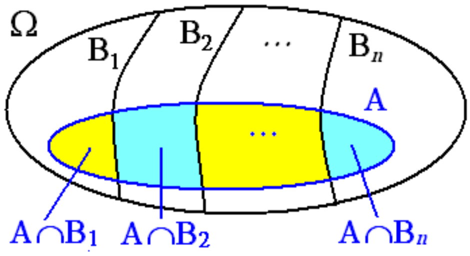
**Exemple** :
Au lycée, si on pose B = « l'élève fait de l'allemand ». Alors B et $\overline{B}$ forment une partition de $\Omega$

### Théorème des probabilités totales :

**Théorème 1.** :
Soit $\Omega$ ***un ensemble fini*** et $B_1, B_2, \ldots, B_n$ $(n\geqslant 2)$ une partition de $\Omega$ .
Soit A un événement quelconque de $\Omega$ . Alors
$$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+\cdots+P(A\cap B_n)$$
$$P(A)=P_{B_1}(A)\times P(B_1)+P_{B_2}(A)\times P(B_2)+\cdots+P_{B_n}(A)\times P(B_n)$$
qu'on peut encore écrire :
$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P_{B_i}(A)\times P(B_i)$$

**Démonstration**

Soit $A$ un événement quelconque de $\Omega$. Alors $A\cap B_1, A\cap B_2, \ldots, A\cap B_n$ forment une partition de $A$.




Ces $n$ événements ne sont pas tous (forcément) non vides ; auquel cas, on peut supprimer les $B_k$ pour lesquels $A\cap B_k=\emptyset$, c'est-à-dire $P(A\cap B_k)=0$.

Ces $n$ événements sont deux à deux incompatibles et leur réunion est égale à $A$.

Par conséquent, $A=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\ldots\cup(A\cap B_n)$. Donc

$$P(A)=P\left((A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\ldots\cup(A\cap B_n)\right)$$

donc $$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+\cdots+P(A\cap B_n)$$

Comme pour tout $i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ : $P(A\cap B_i)=P_{B_i}(A)\times P(B_i)$ on obtient :

$$P(A)=P_{B_1}(A)\times P(B_1)+P_{B_2}(A)\times P(B_2)+\cdots+P_{B_n}(A)\times P(B_n)$$ CQFD.

## Un cas particulier très important :

**Théorème 2.** :
Soit B un événement de $\Omega$ tel que $P(B)\neq 0$. Alors $B$ et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers $\Omega$. ($n$=2). Donc, pour tout événement A de $\Omega$, on a :

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$$

$$P(A)=P_B(A)\times P(B)+P_{\overline{B}}(A)\times P(\overline{B})$$

**Exemple** :

Soit A et B deux événements de $\Omega$ tels que $P(A\cap B)=0{,}2$, $P(B)=0{,}4$ et $P_{\overline{B}}(A)=0{,}3$.
i) Calculer P(A). ii) En déduire $P(A\cup B)$. iii) Calculer $P_{\overline{A}}(B)$, $P(\overline{A}\cap\overline{B})$,...

i) Pour calculer $P(A)$, nous avons besoin de calculer d'abord $P(A\cap\overline{B})$.
Et pour calculer $P(A\cap\overline{B})$, nous avons besoin de calculer $P(\overline{B})$.
Or, $B$ et $\overline{B}$ sont deux événements contraires, donc $P(\overline{B})=1-P(B)$, donc $P(\overline{B})=1-0{,}4$ donc $P(\overline{B})=0{,}6$.
D'autre part, on sait que : $P_{\overline{B}}(A)=0{,}3$, donc $P(A\cap\overline{B})=P_{\overline{B}}(A)\times P(\overline{B})$, donc $P(A\cap\overline{B})=0{,}3\times 0{,}6$, donc $P(A\cap\overline{B})=0{,}18$.
Maintenant, nous pouvons appliquer le théorème des probabilités totales ($n$=2) : $B$ et $\overline{B}$ forment une partition de $\Omega$, donc : $(A\cap B)$ et $(A\cap\overline{B})$ forment une partition de A. Donc :

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})=0{,}2+0{,}18=0{,}38.$$

**Conclusion 1.** : $P(A)=0{,}38$ (*OUF* !!)

ii) On sait que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}38+0{,}4-0{,}2=0{,}58$

**Conclusion 2.** : $P(A\cup B)=0{,}58$ (*C'est plus simple* ! *Non* !)

iii) Amusez-vous à calculer $P_{\overline{A}}(B)$ , $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ ,...

## III. Arbres et arbres pondérés de probabilités

Nous avons déjà rencontré en classes de Seconde et et 1ère les arbres et les arbres pondérés de probabilités.

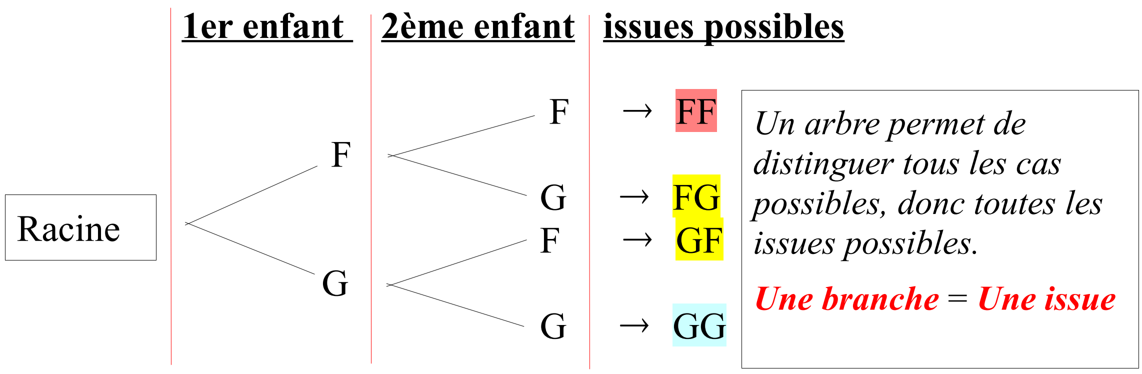
i) On utilise un ***arbre simple*** pour ***dénombrer toutes les issues possibles***, en général, dans des situations d'***équiprobabilité***. On calcule les probabilités comme le quotient des nombres de cas favorables par le nombre de cas possibles.

ii) On utilise un ***arbre pondéré*** pour ***dénombrer toutes les issues possibles, en précisant la probabilité de réalisation de chaque issue***.

**Exemple 1.**

*Une famille a deux enfants. On suppose qu'il y a autant de chances d'obtenir un garçon qu'une fille. Calculer la probabilité des événements "obtenir deux filles" puis "obtenir deux enfants de sexes différents". (On suppose qu'il n'y a pas de jumeaux).*

On appelle F l'événement "*obtenir une fille*" et G l'événement "*obtenir un garçon*" à chaque naissance :




L'univers associé à cette situation comporte *quatre* issues possibles. Donc :

$\Omega=\{FF\ ;\ FG\ ;\ GF\ ;\ GG\}$. Ainsi, si l'événement A = « obtenir deux filles », alors :

$$P(A)=\frac{nombre\ d'issues\ favorables}{nombre\ d'issues\ possibles}=\frac{1}{4}$$

Et si on appelle B = « obtenir deux enfants de sexes différents », on a B = {FG ; GF} et card(B) = 2. Donc

$$P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\ .$$

**Remarque** : Pour *trois enfants*, faites un arbre et montrer qu'il y a 8 issues possibles !

## Arbre pondéré pour calculer des probabilités

**Définition.**
Dans une expérience aléatoire sur un univers $\Omega$ , on considère deux événements *A* et *B*. On dit qu'***un arbre*** est ***pondéré*** lorsque, sur chaque branche, on indique la probabilité d'obtenir l'événement suivant.

**Méthodes de calcul :**

***Règle 1*** *:* La probabilité de la branche partant de A vers B est égale à « la probabilité de B sachant A ». $A \xrightarrow{\quad P_A(B) \quad} B$. En particulier : la probabilité de la branche partant $\Omega$ vers A est égale à P(A). $\Omega \xrightarrow{\quad P(A) \quad} A$.

***Règle 2*** *:* La somme des probabilités des branches partant d'une même racine est toujours égale à 1 : $P_A(B_1)+P_A(B_2)+P_A(B_3)=1$

$$\begin{tikzcd}
 & B_1 \\
A \arrow[ur, "P_A(B_1)"] \arrow[r, "P_A(B_2)"] \arrow[dr, "P_A(B_3)"'] & B_2 \\
 & B_3
\end{tikzcd}$$

***Règle 3*** *:* La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches de ce chemin et représente la probabilité de l'intersection des événements sur ce chemin : $P(A)\times P_A(B)\times P_B(C)=P(A\cap B\cap C)$ .

$$\Omega \xrightarrow{\quad P(A) \quad} A \xrightarrow{\quad P_A(B) \quad} B \xrightarrow{\quad P_B(C) \quad} C$$

***Règle 4*** *:* La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins correspondant à cet événement.

L'exemple suivant illustre cette situation (question 3°).

**Exemple** (*Extrait Ex n°1 BAC 1996*)
Un club sportif compte 80 inscrits en natation, 95 en athlétisme et 125 en gymnastique. Chaque inscrit pratique un seul sport.

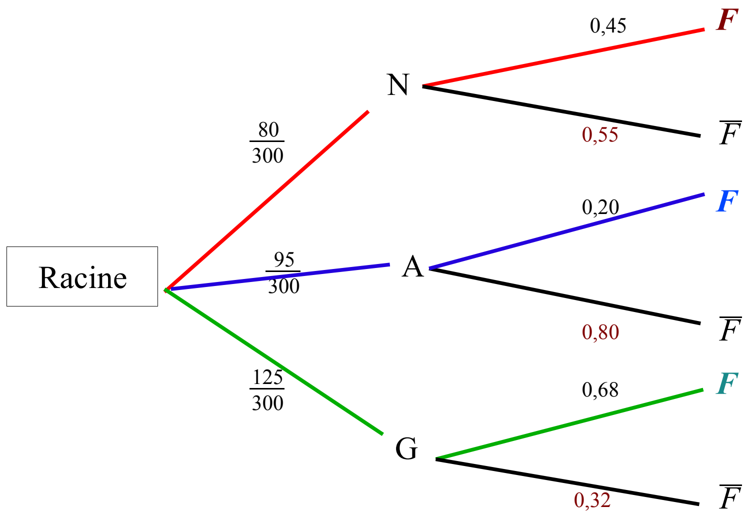
**N.B. -** Si E est un évènement, on notera P(E) sa probabilité et $\overline{E}$ l'évènement contraire. Si E et F sont deux évènements, $P_F(E)$ est la probabilité de « E sachant que F est réalisé ». On donnera les valeurs exactes puis une valeur approchée arrondie au millième près.

Parmi les inscrits en natation, 45% sont des filles. De même 20% des inscrits en atlùétisme et 68% des inscrits en gymnastique sont des filles.

1°) Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2°) On choisit un inscrit au hasard. Quelle est la probabilité $p_1$ que l'inscrit choisi soit une fille pratiquant l'athlétisme ?
3°) On choisit un inscrit au hasard. Quelle est la probabilité $p_2$ que ce soit une fille ?
4°) Si on choisit au hasard une fille, quelle est la probabilité $p_3$ qu'elle pratique l'athlétisme ?

1°) Construction d'un arbre pondéré.

Choix du sport — Fille ou Garçon — Probabilité de chaque chemin




$\rightarrow \quad P(N\cap F) = \frac{80}{300}\times\frac{45}{100}=\frac{3}{25}$

$\rightarrow \quad P(A\cap F) = \frac{95}{300}\times\frac{20}{100}=\frac{19}{300}$

$\rightarrow \quad P(G\cap F) = \frac{125}{300}\times\frac{68}{100}=\frac{17}{60}$

2°) On choisit un inscrit au hasard (sous entendu « dans tout le club»).
On appelle E l'événement : E =« l'inscrit choisi est une fille pratiquant l'athlétisme», ce qui signifie « l'inscrit choisi est une fille ***et*** qui pratique l'athlétisme».
Donc $E=(A\cap F)$ . On applique la règle n°3. Par suite, la probabilité de E est égale au produit de toutes les probabilités des branches de ce chemin :

$$p_1=P(E)=P(A\cap F)$$

$$p_1=P(A)\times P_A(F)$$

$$p_1=\frac{95}{300}\times\frac{20}{100}=\frac{19}{300} \quad \textit{valeur exacte}$$

$$p_1\simeq 0{,}633 \qquad \textit{valeur approchée}$$

3°) On choisit un inscrit au hasard (sous entendu « dans tout le club»).
F est l'événement : F =« l'inscrit choisi est une fille ». On applique la règle n°4.
Par suite, La probabilité de F est la somme des probabilités des chemins (en couleur) correspondant à cet événement. Il y en a trois. Il y a des filles dans chaque groupe.
En réalité, c'est une application directe du théorème des probabilités totales :
N, A et G sont deux à 2 incompatibles et forment une partition de $\Omega$ .
Donc $(F\cap N)$ , $(F\cap A)$ et $(F\cap G)$ forment une partition de F. Par suite :

$$p_2=P(F)=P(F\cap N)+P(F\cap A)+P(F\cap G)$$

$$p_2=P_N(F)\times P(N)+P_A(F)\times P(A)+P_G(F)\times P(G)$$

$$p_2=\frac{80}{300}\times\frac{45}{100}+\frac{95}{300}\times\frac{20}{100}+\frac{125}{300}\times\frac{68}{100}$$

$$p_2=\frac{7}{15} \quad \textit{valeur exacte.}$$

Donc $\quad p_2\simeq 0{,}467 \quad$ *valeur approchée.*

4°) On choisit au hasard une fille. ***On restreint l'univers à F***.

Donc on sait déjà que l'inscrit choisi est une fille, et on veut calculer la probabilité $p_3$ qu'elle pratique l'athlétisme. Donc : $p_3 = P_F(A)$. On revient à la définition :

$$p_3 = P_F(A) = \frac{P(F \cap A)}{P(F)}$$

$$p_3 = \frac{19}{300} \times \frac{15}{7} \quad \text{(pour diviser par une fraction, on multiplie par son inverse)}$$

$$p_3 = \frac{19}{140} \quad \textit{valeur exacte}$$

$$p_3 \simeq 0{,}136 \quad \textit{valeur approchée.}$$

CQFD

## IV. Indépendance de deux événements

Soit A et B deux événements de l'univers $\Omega$ .

***Intuitivement,*** dire que l'événement A est indépendant de l'événement B (ou que B est indépendant de A, ou encore que les deux événements A et B sont indépendants) signifie que :

i) ***P(A) ne change pas, que B soit réalisé ou non***. C'est-à-dire que $P(A) = P_B(A)$

donc $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ Ce qui s'écrit encore : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

Donc *P(A) ne dépend pas de la réalisation ou de la non réalisation de B*.

ii) ***P(B) ne change pas que A soit réalisé ou non***. C'est-à-dire que $P(B) = P_A(B)$

donc $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ Ce qui s'écrit encore : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

Donc *P(B) ne dépend pas de la réalisation ou de la non réalisation de A*.

**Définition** :
Soit $\Omega$ ***un ensemble fini*** et A et B événements de $\Omega$ . On dit que les deux événements A et B sont ***indépendants*** si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

**Exemple.**
On lance un dé parfaitement équilibré. On note la face obtenue. On appelle A l'événement « le résultat est pair », B l'événement « le résultat est supérieur ou égal à 4 » et C l'événement « le résultat est inférieur à 3 ». Ces trois événements sont-ils indépendants deux à deux ?

A = {2 ; 4 ; 6} , B = {4 ; 5 ; 6 ;} et C = {1 ; 2}.

Le dé est supposé parfaitement équilibré, donc on est en situation d'équiprobabilité.

Donc $P(A) = \frac{\textit{Nombre d'issues favorables}}{\textit{Nombre d'issues possibles}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ . De même $P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(C) = \frac{1}{3}$

i) Indépendance de A et B ?

On détermine d'abord l'événement $A \cap B$ = {4;6} et $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ;

alors que : $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ . On a donc : $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

Donc les deux événements *A et B ne sont pas indépendants*.

ii) Indépendance de A et C ?

On détermine d'abord l'événement $A \cap C$ = {2} et $P(A \cap C) = \frac{1}{6}$ ;

alors que : $P(A) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ . On a donc : $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$

Donc les deux événements *A et C sont des événements indépendants*.

iii) Indépendance de B et C ?

On détermine d'abord l'événement $B \cap C = \emptyset$ et $P(B \cap C) = 0$ ;

alors que : $P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ . On a donc : $P(B \cap C) \neq P(B) \times P(C)$

Donc les deux événements *B et C ne sont pas indépendants*.

## Conséquence très importante

**Théorème** :
Soit $\Omega$ ***un ensemble fini*** et A et B événements ***indépendants*** de $\Omega$ . Alors
1°) $\overline{A}$ et $B$ sont indépendants. 2°) $A$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
3°) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

**Démonstration (ROC)**

Soit A et B deux événements indépendants de $\Omega$ .
1°) On sait que $A$ et $\overline{A}$ forment une partition de $\Omega$ . Donc : $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$
Les deux événements $(B \cap A)$ et $(B \cap \overline{A})$ étant incompatibles, nous avons :

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) .$$

Ce qui donne : $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(B \cap A)$

Or, les deux événements A et B sont indépendants, donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Donc : $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A) \times P(B)$

En mettant P(B) en facteur, on obtient :

$$P(B \cap \overline{A}) = P(B)(1 - P(A))$$

Ce qui donne $P(B \cap \overline{A}) = P(B) \times P(\overline{A})$

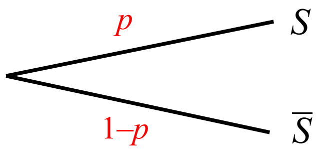
Ce qui signifie que *les deux événements $\overline{A}$ et B sont indépendants*. CQFD

2°) et 3°) sont des conséquences immédiates du 1°).

# IV. Épreuve de Bernoulli. Loi binomiale. (*Rappels de 1ère S*)

## 4.1) Épreuve de Bernoulli

On appelle ***épreuve de Bernoulli*** une expérience aléatoire à deux issues : l'une qu'on appelle ***S*** pour « Succès » avec une probabilité $p = P(S)$ ; et l'autre, l'événement contraire noté $\overline{S}$ , qu'on appelle « Échec » avec une probabilité $1-p$.
On dit « ***épreuve de Bernoulli*** de ***paramètre p*** » *p = probabilité du succès.*




On définit ***la variable aléatoire X*** qui prend la valeur 1 pour Succès et 0 pour Échec. On a alors : $S$ = « $X = 1$ » et $\overline{S}$ = « $X = 0$ ». X ainsi définie, donne « ***le nombre de succès*** » dans l'expérience. X s'appelle une ***loi de Bernoulli $\mathcal{B}$(1, p) de paramètre p***.
La loi de probabilité de la v.a. X est donnée par :

| Valeurs $x_k$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| $p_k = P(X = x_k)$ | $p$ | $1-p$ |

***L'espérance*** mathématique [***la valeur moyenne***] de $X$ est donnée par :
$E(X) = p_1 x_1 + ... + p_n x_n$ . Donc $E(X) = p\times1+(1-p)\times0$. D'où : $\boxed{E(X) = p}$

## 4.1) Schéma de Bernoulli – Loi binomiale

On recommence ***n fois*** une épreuve de Bernoulli de paramètre $p$, ***dans les mêmes conditions*** et de façon indépendante – c'est-à-dire ***avec remise***. On fait un arbre pondéré et obtient un ***schéma de Bernoulli.***

On appelle X la variable aléatoire qui compte ***le nombre de succès*** sur les $n$ épreuves.

On obtient alors 0 succès, 1 succès, ... ou $n$ succès. Donc $X$ prend les valeurs : 0;1 ; 2 ; ...$n$. On écrit : $X(\Omega)=\{0;1;2;\ldots;n\}$ .
On dit alors que X suit une ***loi binomiale $\mathcal{B}$(n , p) de paramètres n et p***.

La loi de probabilité de X est donnée par :

| Valeurs de ***k*** | 0 | 1 | 2 | ... | n |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_k = P(X = k)$ | $P(X=0)$ | $P(X=1)$ | $P(X=2)$ | ... | $P(X=n)$ |

Recherchons d'abord sur un exemple, comment trouver ces valeurs.

## 4.3) Étude d'un exemple modèle

On considère un vivier (grand aquarium) de 100 poissons dont 10 brochets. Avec une épuisette, on prélève un (seul) poisson. On définit le ***succès S*** = « *le poisson prélevé*

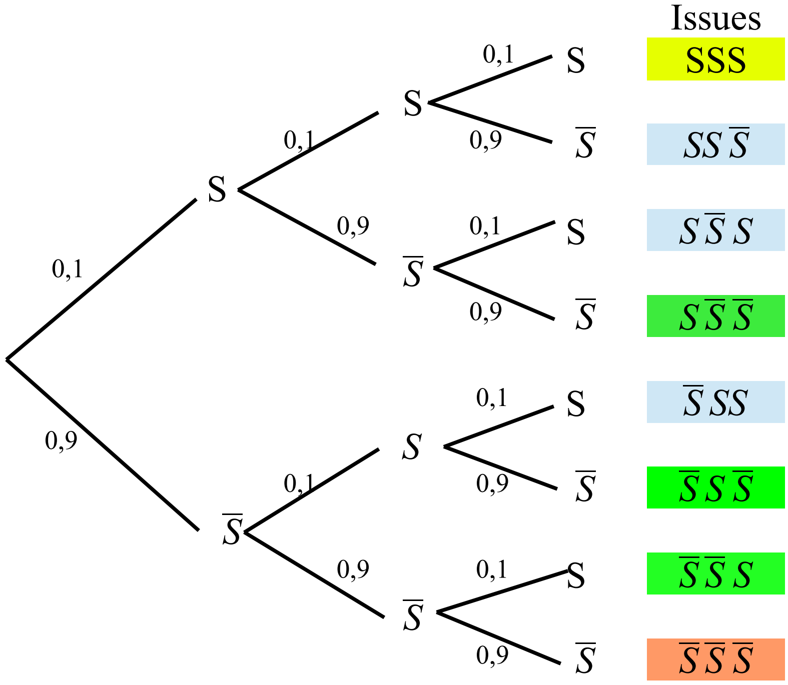
*est un brochet* ». $P(S)=\frac{10}{100}=0{,}1$. Ainsi, l'échec $\overline{S}$ = « *le poisson prélevé n'est pas un brochet* ». $P(\overline{S})=1-0{,}1=0{,}9$. On obtient une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}1$.
On recommence 3 fois cette épreuve, dans les mêmes conditions et de façon indépendante – c'est-à-dire avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès sur les 3 épreuves. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}1$.

Calculer les probabilités des événements suivants :

1°) $E_3$ = "X=3" = "obtenir 3 succès" ;
2°) $E_1$ = "X=1" = "obtenir 1 succès" ;
3°) $E_2$ = "X=2" = "obtenir 2 succès" ;
4°) $E_0$ = "X=0" = "obtenir 0 succès".

----------------------------------

On construit un arbre pondéré. On obtient un schéma de Bernoulli.




1°) Calculons la probabilité de "X=3" = "obtenir 3 succès".
Il n'y a qu'***un seul chemin*** correspondant à 3 succès. Donc :
« SSS » = « $S_1$ » et « S2 » et « S3 »
= « obtenir un succès au premier tirage » et « un succès au 2ème tirage » et « un succès au 3ème tirage ».

Donc : $\boxed{P(X=3) = \mathbf{P(SSS)} = p\times p\times p \text{ donc : } P(X=3) = \mathbf{p^3} = \mathbf{1p^3(1-p)^0}}$

1 = nombre de chemins
$p^3$ = proba de 3 succès
$(1-p)^0$ = probabilité de 0 échecs.

2°) Calculons la probabilité de "X=1" = "obtenir 1 succès".
Il y a ***trois chemins*** correspondant à 1 succès (= 2 échecs). [Le succès peut se positionner en premier, au milieu ou en 3ème position]. Donc :

$$P(X=1) = P(\ S\overline{S}\,\overline{S} \ \text{ ou } \ \overline{S}S\overline{S} \ \text{ ou } \ \overline{S}\,\overline{S}S\ )$$
$$= p\times(1-p)\times(1-p) \ + \ (1-p)\times p\times(1-p) \ + \ (1-p)\times(1-p)\times p$$
$$P(X=1) = 3\,p(1-p)^2.$$

3= nombre de chemins
$p = p^1$ = proba de 1 succès
$(1-p)^2$ = probabilité de 2 échecs.

3°) Calculons la probabilité de "X=2"= "obtenir 2 succès".
Il y a aussi ***trois chemins*** correspondant à 2 succès (= 1 échec). [L'échec peut se positionner en premier, au milieu ou en 3ème position]. Donc :

Donc : $P(X=2) = 3\,p^2(1-p).$

1 = nombre de chemins
$p^2$ = proba de 2 succès
$(1-p) = (1-p)^1$ = probabilité de 1 échec.

4°) Calculons la probabilité de "X=0" = "obtenir 0 succès".
Il n'y a qu'***un seul chemin*** correspondant à 0 succès (= 3 échecs).

Donc : $P(X=0) = (1-p)^3 = 1p^0(1-p)^3.$

1 = nombre de chemins
$p^0$ = proba de 0 succès
$(1-p)^3$ = probabilité de 3 échecs.

Conclusion : ***P(k succès) = Nombre de chemins*** $\times\ p^k\ \times\ (1-p)^{n-k}$.

Le ***nombre de chemins qui aboutissent** à **k succès***, se note $\binom{n}{k}$ et s'appelle le ***coefficient binomial*** «***k*** parmi ***n*** ». Ce qui donne :

$$P(\text{"}k \text{ succès"}) = P(X=k) = \binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$$

On revient à notre exemple. Si n = 3 et p = 0,1, on obtient la loi de probabilité de $X$ :

| Valeurs de ***k*** | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_k = P(X=k)$ | 0,729 | 0,243 | 0,027 | 0,001 |

## 4.4) Éspérance de la loi binomiale

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$. Alors :
***L'espérance mathématique*** [***la valeur moyenne***] de $X$ est donnée par :

$$E(X) = np$$

### 4.5) Utilisation de la calculatrice

#### *a) Calcul d'une probabilité "ponctuelle"*

Toutes ces valeurs sont données par les calculatrices avec les instructions BinomFdp ou Binompdf ou Bpd ou Binomial pdf ou encore Binomiale DdP...voir ci-dessous.

**Exemple :** Nous choisissons ici une v.a. $X$ qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;\,0.3)$.

| *Casio : Graph 35+ et modèles sup.* | *Texas : TI82 Stats et modèles sup.* |
|---|---|
| **Calcul des probabilités** ***P (X=k)***<br>Menu▶ **STAT**▶ **DIST**▶ **BINM**▶ **BPD**<br>***Pour calculer P (X=2)***<br>**Binomial P.D.**<br>**Data : Variable**<br>Choisir ici « Variable »<br>**x : 2** Placer ici la valeur de ***k***<br>**Numtrial : 10** Placer ici la valeur de ***n***<br>**P : 0.3** Placer ici la valeur de ***p***<br>**Save Res :None**<br>**Execute**<br>**CALC** Pour calculer, appuyer sur **F1**<br>Après exécution on obtient :<br>**Binomial P.D**<br>**P=0.23347444** | **Calcul des probabilités** ***P (X=k)***<br>Menu▶ **2nd DISTR** (ou ▶ **Distrib**)<br><br><br>***Pour calculer P (X=2)***<br>Menu ▶ **2nd DISTR** ▶ **Binompdf**<br>ou ▶ **BinomFdp** (version fr)<br>Compléter les paramètres : n , p , k<br>**Binompdf(10,0.3, 2)**<br>Après exécution on obtient :<br>**0.2334744405** |

#### *b) Calcul des probabilités "cumulées"*

La probabilité pour « ***obtenir au plus k succès*** » = $P(X \leqslant k)$

C'est une « ***probabilité cumulée croissante*** », c'est-à-dire :

$$\boxed{P(X \leqslant k) = P(X=0) + P(X=1) + \cdots + P(X=k)}$$

Cette valeur est aussi <u>*donnée directement par les calculatrices*</u> avec Binomcdf ou BinomFrép ou Bcd ou Binomial Cdf ou encore Binomiale FdR ... voir ci-dessous. Vous remarquerez au passage le <u>"p" pour proba. ponctuelle</u> et le <u>"c" pour probabilité cumulée</u>.

#### *c) Calcul direct de toutes les probabilités "ponctuelles" : Loi de probabilité*

Aller dans ▶ **f(x) =** ou ▶ **Y =** et rentrer directement les fonctions <u>en remplaçant ***k*** par **X**</u> :

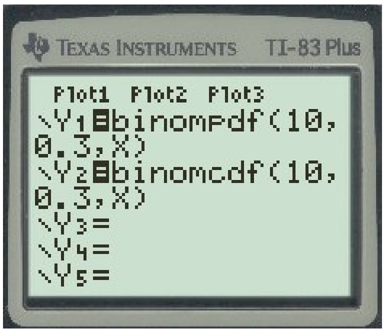
**\Y1=** ▶*2nde Distrib* **Binompdf(n,p,X)** fd**p** ou **p**df comme **f**ct de **d**istribution de **p**roba.

**\Y2 =** ▶*2nde Distrib* **Binomcdf(n,p,X)** **c**df ou fd**c** comme **f**ct de **d**istribution **c**umulée,...

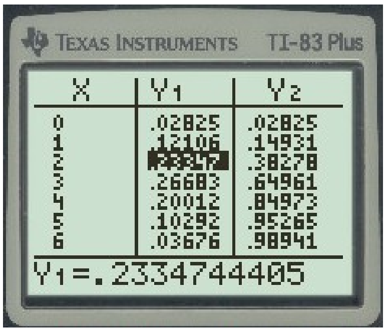
ou

**\Y1=** ▶*2nde Distrib* **BinomFdp(n,p,X)** (version fr) et

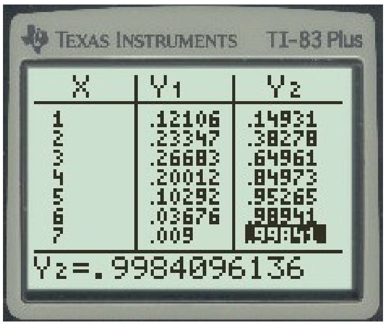
**\Y2 =** ▶*2nde Distrib* **BinomFrép(n,p,X)** (version fr) avec les valeurs exactes de ***n*** et ***p***. Puis ▶**2nde TABLE** pour ***afficher le tableau de valeurs***.




**Y1 et Y2 rentrées**

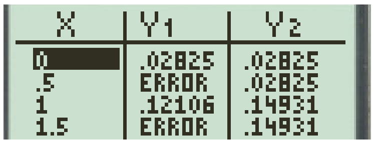



***P*(*X*=2)=0,2334744405**




***P*** **(*X* ≤ 7)=0,9984096136**

***Attention !*** Si la machine affiche **ERROR** dans Y1, il faut aller dans ▶***2nde TableSet*** ou ▶***2nde Déf Table*** pour redéfinir le pas : ***commencer à* 0** et définir ***un pas égal à* 1**.




## Remarques

La probabilité « ***pour obtenir au moins k succès*** » = $P(X \geqslant k)$ , c'est aussi une « ***probabilité cumulée décroissante*** », c'est-à-dire :

$$\boxed{P(X \geqslant k) = P(X = k) + P(X = k+1) + \cdots + P(X = n)}$$

***Attention !*** Ces valeurs cumulées décroissantes ***ne sont pas*** données par les calculatrices. Cependant, si on veut utiliser les calculatrices, on peut utiliser l'événement contraire : Donc : $\boxed{P(X \geqslant k) = 1 - P(X < k) = 1 - P(X \leqslant k-1)}$ .

Attention aux symboles « ***inférieur*** » et « ***inférieur ou égal*** ».

### *c) Calcul des coefficients binomiaux*

Nous choisissons ici une v.a. X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10\ ;\ 0.3)$.

| *Casio : Graph 35+ et modèles sup.* | *Texas : TI82 Stats et modèles sup.* |
|---|---|
| **Calcul des coefficients binomiaux**<br>Dans le **Menu RUN,**<br>appuyer sur la touche **OPTN**,<br>puis choisir **PROB**.<br>**Pour calculer** $\binom{10}{3}$ ,<br>taper **10**,<br>puis choisir **nCr**,<br>puis taper **3** et **EXE**. | **Calcul des coefficients binomiaux**<br>**Pour calculer** $\binom{10}{3}$ ,<br>taper **10**,<br>puis appuyer sur la touche **MATH**,<br>choisir le menu **PRB,**<br>puis choisir **nCr**<br>ou **Combinaison** (version fr),<br>puis taper **3** et **ENTER**. |

*A VOUS DE JOUER*