Dérivation

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Rappels : Nombre dérivé d'une fonction en un point. **Tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable en un point.**	Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé.	Le nombre dérivé est défini comme limite du taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0. L'utilisation des outils logiciels facilite l'introduction du nombre dérivé.
Calculs de dérivées : compléments	• Calculer les dérivées des fonctions : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$; $x \mapsto (u(x))^n$, où n est un entier relatif non nul ; $x \mapsto e^{u(x)}$; $x \mapsto \ln(u(x))$ • Calculer la dérivée d'une fonction $x \mapsto f(ax+b)$ où f est une fonction dérivable, a et b deux nombres réels.	À partir de ces exemples, on met en évidence une expression unifiée de la dérivée de la fonction $x \mapsto f(u(x))$, mais sa connaissance n'est pas une capacité attendue. Les techniques de calcul sont à travailler mais ne doivent pas être un frein à la résolution de problèmes. On a recours si besoin à un logiciel de calcul formel. ***AP*** *: Exemples de fonctions discontinues, ou à dérivées non continues.*

I. RAPPELS : Notion de dérivée

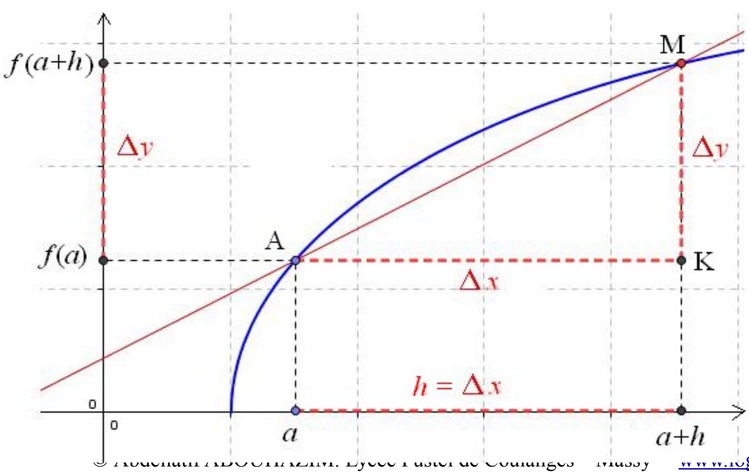
1.1) Taux d'accroissement

Définition 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a, x \in I$, $x \neq a$. On appelle ***taux d'accroissment*** de la fonction f entre a et b, le nombre réel :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

C'est le coefficient directeur de la droite (AM) où A($a, f(a)$) et M($x, f(x)$).



Autre méthode :

Si on pose $h=x-a$ alors $x=a+h$ et $\Delta x=h$ .On a une deuxième définition :

Définition 2.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a\in I$. Soit h un nombre réel non nul tel que $a+h\in I$. On appelle ***taux d'accroissment*** de la fonction f entre a et $a+h$, le nombre réel $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

C'est le ***coefficient directeur*** de la droite (AM) où A($a, f(a)$) et M($a+h, f(a+h)$).

Exemple 1.

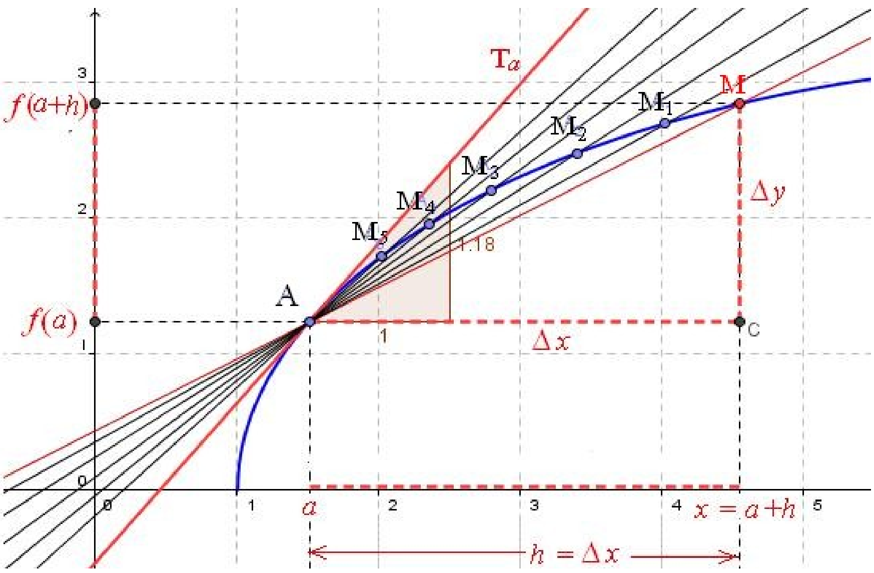
Le taux d'accroissement de la fonction $f:x\rightarrow x^2$ entre 1 et 1+h est donné par :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1+2\text{h}+h^2-1}{h} = \frac{2\text{h}+h^2}{h} = 2+h$$

1.2) Nombre dérivé en un point

Lorsque h prend des valeurs h_1, h_2, h_3,... « de plus en plus proches » de 0, le point M prend successivement les positions M_1, M_2, M_3,....et $a+h$ prend des valeurs « de plus en plus proches » de a ; les droites (AM_1), (AM_2), (AM_3),.... tendent vers une position limite : ***la droite T_a, tanagente à la courbe au point d'abscisse a***.

Le coefficient directeur de cette droite s'appelle ***le nombre dérivé*** de f au point d'abscisse a et se note ***$f'(a)$***.



Définition 3.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$ .On dit que la fonction ***f* est dérivable en *a*** si le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ tend vers un ***nombre réel fini,*** noté ***f '*(a)**, lorsque h tend vers 0 et on écrit :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{ou encore} \quad f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

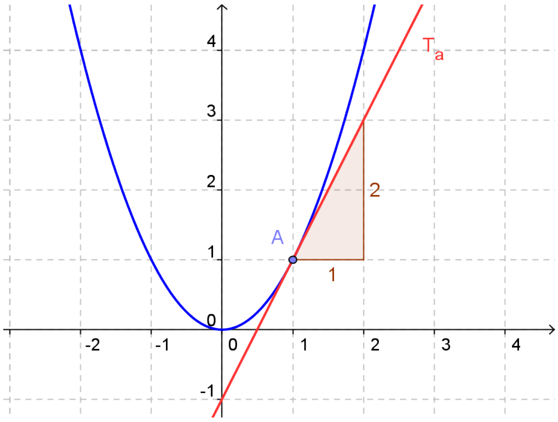
Le nombre f '(a)** – lorsqu'il existe –* ***s'appelle le nombre dérivé de f en a et désigne le coefficient directeur de la droite tangente à la courbe au point d'abscisse a.

Exemple 2.

Pour la fonction $f: x \to x^2$ vue ci-dessus, nous avons :

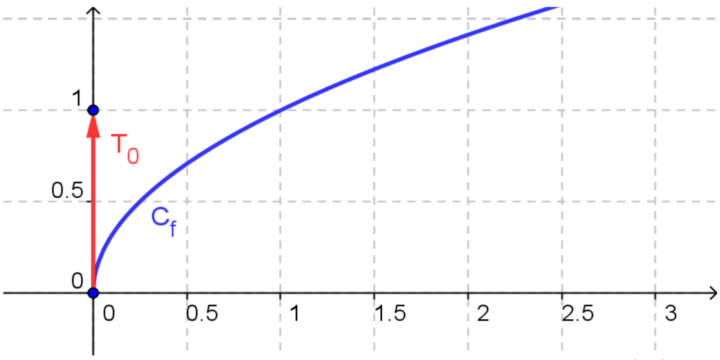
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}(2+h)=2\in\mathbb{R}$$

Donc la fonction carrée $f: x\to x^2$ est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.



Exemple 3.

La courbe suivante représente la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$



Dérivabilité en 0 : Le taux d'accroissement de la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ entre 0 et 0+*h*,

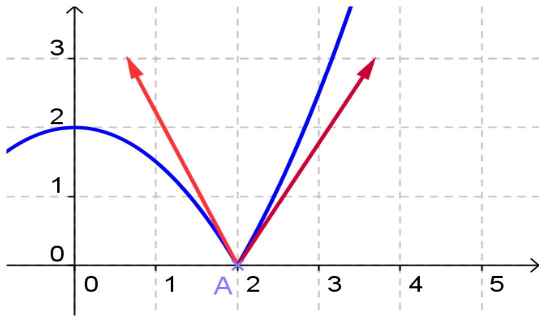
$h>0$, est donné par : $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \dfrac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$

Donc, $\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$ n'est pas un nombre réel fini !

Par conséquent, la fonction racine carrée $f: x \to \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Cependant, la droite T_0, tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est une droite parallèle à l'axe des ordonnées (verticale). Elle n'a pas de coefficient directeur ! (*La pente d'une droite verticale est infinie ; une droite parallèle à Oy n'a pas de coefficient directeur !*).

Exemple 4.

La courbe suivante représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



Au point A(2 ; 0) la courbe forme *un angle* et admet deux demi-tangentes qui n'ont pas le même coefficient directeur. On dit que la fonction f n'est pas dérivable en 2.

1.3) Équation de la droite tangente

Théorème 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a et a pour nombre dérivé $f'(a)$, alors la droite $\mathbf{T}_a$ passant par le point $A(a, f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$, est **tangente à la courbe** $\mathbf{C}_f$ au point A. Son équation est donnée par :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Démonstration.

Soit $M(x ; y)$ un point quelconque du plan. Alors, on a les équivalences suivantes :

$M(x; y) \in T_a \quad \Leftrightarrow$ Le coefficient directeur de la droite (AM) est $\boldsymbol{m = f'(a)}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$ (*méthode infaillible pour retrouver l'équation*)

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{y - f(a)}{x-a} = f'(a)$ puis j'écris l'égalité des produits en croix

$\Leftrightarrow \quad y - f(a) = f'(a)(x-a)$ et je transpose $f(a)$ à droite.

$\Leftrightarrow \quad y = f'(a)(x-a) + f(a)$ CQFD.

Exemple 5. Nous avons vu que la fonction $f: x \to x^2$ est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.
Soit $A(1, f(1)) \in C_f$. On a donc $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$.
L'équation de la droite tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est donnée par :

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ donc $y=2(x-1)+1$ donc $y=2x-2+1$.

Conclusion : L'équation de la droite T_0 tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est : $y=2x-1$. CQFD

1.4) Fonction dérivée

Nous venons de définir le nombre dérivé d'une fonction en un point, nous allons maintenant étendre cette notion à tous les points d'un intervalle.

Définition 4.

1°) Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que ***f* est dérivable sur l'intervalle *I*** si et seulement si elle est dérivable en tout nombre $x\in I$.

2°) Si f est dérivable sur l'intervalle I, alors on définit une nouvelle fonction sur I, notée f' qui à tout nombre $x\in I$ fait associer le nombre dérivé $f'(x)$

La fonction f' s'appelle ***la fonction dérivée de f*** sur l'intervalle I.

Remarque.
Une fonction f définie sur un domaine D_f n'est pas nécessairement dérivable en tout point de D_f. On peut dire donc que le domaine de définition $D_{f'}$ de f', qui est contenu dans D_f n'est pas nécessairement égal à D_f.

Nous avons vu ci-dessus que la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Donc $0\in D_f$ mais $0\notin D_{f'}$.

II. Dérivées des fonctions usuelles

2.1) Dérivées des fonctions simples

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, D_f son domaine de définition et $D_{f'}$ son domaine de dérivabilité :

D_f	Fonctions simples	Fonctions dérivées	$D_{f'}$
$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$	$f(x)=k$ $f(x)=x$ $f(x)=ax+b$ $f(x)=x^2$ $f(x)=x^3$, $f(x)=x^n$	$f'(x)=0$ $f'(x)=1$ $f(x)=a$ $f'(x)=2x$ $f(x)=3x^2$, $f(x)=n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$
$[0;+\infty[$ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f(x)=\sqrt{x}$ $f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$]0;+\infty[$ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Pour les démonstrations, revoir le cours de 1ère S.

Pour être complet, on peut rajouter les dérivées des fonctions de référence suivantes. Les démonstrations serons faites dans les chapitres respectifs :

D_f	Fonctions simples	Fonctions dérivées	D_f
$\mathbb{R}$	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = e^x$	$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$]0;+\infty[$	$f(x) = \ln x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$	$]0;+\infty[$

2.2) Dérivées des fonctions composées

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors, les dérivées des fonctions composées peuvent « se déduire » facilement des dérivées des fonctions simples par « multiplication par $\boldsymbol{u'}$ »

Fonctions simples	Fonctions dérivées	Fonctions composées	Fonctions dérivées
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$u + v$	$u' + v'$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$k.u$	$k.u'$
$f(x) = ax+b$	$f(x) = a$	$u\,v$	$u'v + uv'$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	u^2	$2\,\boldsymbol{u'}\,u$
$f(x) = x^3$,	$f(x) = 3x^2$,	u^3	$3\,\boldsymbol{u'}\,u^2$
$f(x) = x^n$	$f(x) = n\,x^{n-1}$	u^n	$n\,\boldsymbol{u'}\,u^{n-1}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$; $u(x)\geqslant 0$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$; $u(x) > 0$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{v}$; $v(x)\neq 0$	$-\dfrac{v'}{v^2}$; $v(x)\neq 0$
		$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\sin(u)$	$\boldsymbol{u'}\cos(u)$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\cos(u)$	$-\boldsymbol{u'}\sin(u)$
$f(x) = e^x$	$f(x) = e^x$	$\exp(u)$	$\boldsymbol{u'}\exp(u)$
$f(x) = \ln x$; $x > 0$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$; $x>0$	$\ln(u)$; $u(x) > 0$	$\dfrac{u'}{u}$; $u(x) > 0$

Plus généralement, soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et prenant ses valeurs dans un intervalle J de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$ Alors la fonction $f \circ u$ est dérivable sur I et

$$\boxed{[\,f(u)\,]' = u' \times f'(u)}$$ Formule non exigible au BAC

Autrement dit :

Pour tout $x \in I$: $\boxed{[\,f(u)\,]'(x) = u'(x) \times f'(\,u(x)\,)}$ Formule non exigible au BAC

2.2) Démonstrations

a) Exemple type 1. Fonction racine carrée de u.

Soit u une fonction définie, dérivable et *strictement positive* sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, la fonction définie pour tout $x \in I$ par : $f(x)=\sqrt{u(x)}$ est dérivable en tout point $x \in I$ où $u(x)>0$ et :

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

On fera une étude particulière de la dérivée aux points $a \in I$ *où* $u(a)=0$.

Démonstration.

Pour cela on calcule d'abord le taux d'accroissement. Pour tout $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ on a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}}{h}$$ on multiplie par la qunatité conjuguée

$$=\frac{[\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}][\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}]}{h[\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}]}$$

$$=\frac{u(x+h)-u(x)}{h[\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}]}$$

$$=\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times\frac{1}{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}$$

Or, d'une part, la fonction u est dérivable en x, donc : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x)$.

Et, d'autre part, la fonction u étant dérivable en x, elle donc est continue en x. Comme la fonction racine carrée est aussi continue sur son domaine de définition, la fonction composée $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est aussi continue en x.

Donc : $\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}=2\sqrt{u(x)}$.

Par conséquent, par produit des limites, on a : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Ce qui montre que la fonction $x \mapsto f(x)=\sqrt{u(x)}$ est dérivable en tout point $x \in I$ tel que $u(x)>0$ et $f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$. CQFD

b) Exemple type 2. u est une fonction affine

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a et b deux nombres réels fixés tels que $a\neq 0$. Alors, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(ax+b)$, est dérivable sur tout intervalle J de $\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in J$, $ax+b \in J$ et : $g'(x)=a\times f'(ax+b)$

Démonstration.

Pour cela on calcule d'abord le taux d'accroissement. Pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a :

$$\tau_g(x, x+h) = \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{f(a(x+h)+b)-f(ax+b)}{h}$$
$$= \frac{f(a(x+h)+b)-f(ax+b)}{h}$$
$$= \frac{f(ax+b+ah)-f(ax+b)}{h}$$

On pose $x_0 = ax+b$ et $k = ah.$ Alors : $(h \to 0) \Leftrightarrow (k \to 0)$. Donc :

$$\tau_g(x, x+h) = a \times \frac{f(ax+b+ah)-f(ax+b)}{a\,h}$$
$$= a \times \frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}$$

On passe à la limite lorsque h tend vers 0. Ce qui donne :

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = a \times \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k} = a \times f'(x_0)$$

Ce qui donne $g'(x) = a \times f'(ax+b)$. CQFD

2.2 c) Exemples de calcul des dérivées

Exemple 1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = (x^3+5x-1)^4$ 2°) $g(x) = \sqrt{x^2-3}$

Ex.1°) $f(x) = (x^3+5x-1)^4$. f est définie sur $\mathbb{R}$.

On pose : $f(x) = (u(x))^4$ avec $u(x) = x^3+5x-1$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 3x^2+5$. Donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $f'(x) = u'(x) \times (u(x))^3$

$f'(x) = (3x^2+5) \times (x^3+5x-1)^3$. CQFD

Ex.2°) . $g(x) = \sqrt{x^2-3}$. *g* est définie sur $D = \left]-\infty; -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}; +\infty\right[$.

On pose : $g(x) = \sqrt{u(x)}$ vec $u(x) = x^2-3$. *u* est dérivable sur *I* et $u'(x) = 2x$.

$u(x) > 0$ si set seulement si $x \in I = \left]-\infty; -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}; +\infty\right[$.

Donc *g* est dérivable sur $\left]-\infty; -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}; +\infty\right[$ et

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}$$. CQFD

Exemple 2. Étudier la dérivabilité de la fonction suivante sur son domaine de définition : $f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}$.

Ex.3°) $f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}$. *h* est définie sur $D=[1;+\infty[$.
On pose : $u(x)=x-1$. *u* est dérivable sur *I* et $u'(x)=1$.
$u(x)>0$ si set seulement si $x > 1$. On distingue deux cas :
– **Pour $x > 1$** : Donc *f* est dérivable sur $I=[1;+\infty[$ et

$$f'(x)=1\times\sqrt{x-1}+(x-1)\times\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \quad =\sqrt{x-1}+\frac{x-1}{2\sqrt{x-1}}=\frac{3(x-1)}{2\sqrt{x-1}}$$

Donc : $f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x-1}$ pour $x > 1$.

– **Étude la dérivabilité de *f* en $x = 1$**.
On calcule le taux d'accroissement de *f* en 1.

on a : $$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h-1)\sqrt{1+h-1}-(1-1)\sqrt{1-1}}{h}=\frac{h\sqrt{h}-0}{h}=\sqrt{h}.$$

Donc : $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$. Donc, la fonction *f* est dérivable en $x=1$ et $f'(1)=0$.

Conclusion. La fonction *f* est dérivable sur son domaine de définition $[1;+\infty[$.

CQFD