Raisonnement par récurrence
Suites numériques

Exercice n°1. [RÉSOLU]

On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0=-1 \\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}\,, n\geq 0 \end{cases}$

1°) A la calculatrice ou avec un tableur : [***Méthode de recherche - TICE***]

Afficher les 14 premières valeurs de la suite et faire des conjectures :

a) Trouver un minorant de la suite (u_n).

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). La suite est-elle stationnaire ?

c) Trouver un encadrement de la suite (u_n).

d) Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n).

2°) Par le calcul : [***Méthode calculatoire***]

a) Calculer les quatre premiers termes de cette suite.

b) Démontrer que pour tout entier n, $-1\leqslant u_n\leqslant 2$

c) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

d) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

e) Déterminer la limite de la suite (u_n).

3°) Utilisation de la « ***Méthode de la fonction associée*** » à la suite récurrente (u_n).

[*On utilisera cette méthode à partir du moment où la fonction f est définie dans l'énoncé.*]

On considère la fonction définie pour $x\in[-1\,;2]$ par : $f(x)=\sqrt{x+2}$.

a) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $[-1\,;2]$.

b) Démontrer que : [si $x\in[-1\,;2]$ alors $f(x)\in[-1\,;2]$].

c) Démontrer que pour tout entier n, $-1\leqslant u_n\leqslant 2$

d) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

e) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

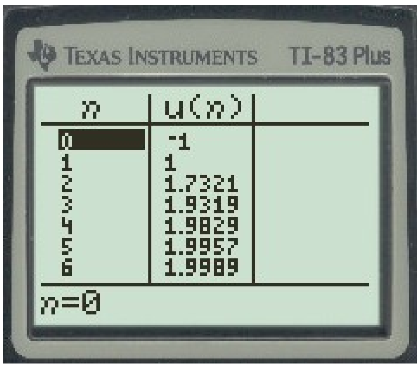
f) Représentation graphique

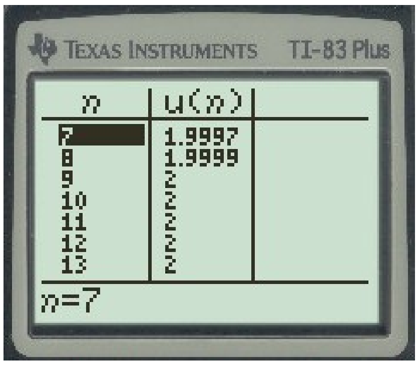
g) Déterminer la limite de la suite (u_n).

1°) Calculatrice ou tableur : [Méthode de recherche - TICE]

a) A la calculatrice, on affiche le tableau des valeurs :

Par lecture sur la calculatrice, on voit bien que, à part le premier terme $u_0=-1$, tous les (autres) termes de la suite sont positifs, donc on a déjà ***un minorant*** de la suite. Tous les termes sont supérieurs à –1, donc « *il semble que –1 soit un minorant de la suite* ».





b) Par lecture sur la calculatrice, on peut déduire la conjecture :« *il semble que la suite* (u_n) *soit croissante* ». Autrement dit : Pour tout entier *n :* $u_n \leqslant u_{n+1}$.
Mais, il est clair que « *la suite n'est pas stationnaire* ». Toutes les valeurs semblent être inférieures à 2, mais les dernières valeurs ont été arrondies à 2 par la calculatrice.

c) On peut ainsi en déduire la conjecture ; « *il semble que toutes les valeurs soient comprises entre – 1et 2* ». Autrement dit : Pour tout entier *n :* $-1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

d) Par lecture sur la calculatrice, on peut déduire la conjecture :« *il semble que la suite* (u_n) *soit convergente et tend vers 2 lorsque n tend vers l'infini* ».

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$$

Ces résultats sont à démontrer à l'aide des théorèmes du cours.

2°) Par le calcul : [Méthode calculatoire]

[Cette méthode s'applique facilement, dans certains cas, en utilisant les propriétés des inégalités vues en 3ème et en Seconde, mais devient plus difficile, voire impossible à appliquer dans d'autres cas avec des quotients ou des expressions plus compliquées de u_{n+1}*.]*

a) Calcul des premiers termes :
$u_0 = -1$ donc $u_1 = \sqrt{-1+2} = 1$, donc $u_2 = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$ donc $u_2 = \sqrt{\sqrt{3}+2}$,...

b) Montrons que : Pour tout entier n, $-1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
Pour chaque entier *n*, on appelle P_n la proposition logique:[$-1 \leqslant u_n \leqslant 2$].
Montrons par récurrence que : Pour tout entier *n :* [P_n est vraie].

<u>Initialisation</u>
Pour $n = 0$: $u_0 = -1$ donc : $-1 \leqslant u_0 \leqslant 2$ Donc P_0 est vraie.
<u>Hérédité</u>
Soit $n \in \mathbb{N}$
Supposons que P_n est vraie. (Hypothèse de récurrence).
Montrons que P_{n+1} est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que : $-1 \leqslant u_n \leqslant 2$ (HR)
En ajoutant 2 aux trois membres, on obtient : $-1+2 \leqslant u_n + 2 \leqslant 2+2$
Ce qui donne : $1 \leqslant u_n + 2 \leqslant 4$.
Or, la fonction « racine carrée » est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc :
$\sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_n+2} \leqslant \sqrt{4}$. Donc $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
Et comme $-1 < 1$, on a bien : $-1 < 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$, donc $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
Ce qui montre que P_{n+1} est vraie. Donc la propriété est héréditaire.
<u>Conclusion</u>. Pour tout entier *n :* $-1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

c) Montrons que la suite (u_n) *est strictement croissante.C'est-à-dire :*
Pour tout entier n, $u_n < u_{n+1}$.
Pour chaque entier *n*, on appelle P_n la proposition logique:[$u_n < u_{n+1}$].
Montrons par récurrence que : Pour tout entier *n :* [P_n est vraie].

<u>Initialisation</u>
Pour $n = 0$: $u_0 = -1$ et $u_1 = 1$ donc : $u_0 < u_1$. Donc P_0 est vraie.
<u>Hérédité</u>
Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que P_n est vraie. (Hypothèse de récurrence).
Montrons que P_{n+1} est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que : $u_n < u_{n+1}$ (HR)
En ajoutant 2 aux deux membres, on obtient : $u_n + 2 < u_{n+1} + 2$
Or, la fonction « racine carrée » est *strictement* croissante sur $[0, +\infty[$, donc :
$\sqrt{u_n + 2} < \sqrt{u_{n+1} + 2}$. Donc $u_{n+1} < u_{n+2}$.
Ce qui montre que P_{n+1} est vraie. Donc la propriété est héréditaire.
Conclusion. Pour tout entier n :. $u_n < u_{n+1}$.
Donc, la suite (u_n) est strictement croissante.

d) Montrons que la suite (u_n) est convergente.
D'après ce qui précède, la suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 2. Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant 2$.

e) Détermination de la limite de la suite (u_n).
La suite (u_n) est définie à l'aide d'une formule de récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}, n \geq 0 \end{cases}$$

D'après la question précédente, on sait que la suite (u_n) est convergente.
On pose $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$. Mais la suite (u_{n+1}) est aussi convergente et tend vers la même limite. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$. Par conséquent, l doit vérifier les deux conditions suivantes : $l = \sqrt{l+2}$ et $-1 \leqslant l \leqslant 2$

On obtient alors : $\begin{cases} l = \sqrt{l+2} \\ -1 \leqslant l \leqslant 2 \end{cases}$ puis, en élevant au carré, on obtient $\begin{cases} l^2 - l - 2 = 0 \\ -1 \leqslant l \leqslant 2 \end{cases}$.

Cette équation admet deux solutions [on calcule le discriminant, etc...] : $l = -1$ et $l = 2$
Or, à part u0, tous les termes sont positifs et la suite et strictement croissante. Donc –1 ne peut pas être la limite de la suite. Par conséquent, $l = 2$.

Conclusion : La suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

3°) Méthode de la fonction associée

*[Cette méthode utilise un outil puissant qu'est **la dérivée** et s'applique « tout le temps » ! C'est mieux ! Non ?]*

a) Sens de variation de f :
Montrons que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [–1 ; 2].
Tout d'abord, la fonction f est bien définie sur l'intervalle [–1 ; 2] par $f(x) = \sqrt{x+2}$.
Pour étudier le sens de variation de f, on calcule sa dérivée :

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$. Il est clair que : pour tout $x \in [-1 \ ; 2]$ $f'(x) > 0$

Donc, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [–1 ; 2]. On obtient le tableau de variation suivant :

x	-1	2
$f(x)$	1 ↗	2

b) Montrons que la fonction f est « stable » sur [–1 ; 2] :

C'est-à-dire, [si $x\in[-1;2]$ alors $f(x)\in[-1;2]$].

Or, d'après le tableau de variation avec $f(-1) = 1$ et $f(2) = 2$, la fonction f est strictement croissante et prend « toutes » ses valeurs dans l'intervalle [1 ; 2]. Et comme $[1;2]\subset[-1;2]$, On a bien : pour tout $x\in[-1;2]$: $f(x)\in[-1;2]$.

c) Montrons que pour tout entier n, $-1\leqslant u_n\leqslant 2$

Pour chaque entier n, on appelle P_n la proposition logique:[$-1\leqslant u_n\leqslant 2$].

Montrons par récurrence que : Pour tout entier n : [P_n est vraie].

Initialisation

Pour $n = 0$: $u_0=-1$ donc : $-1\leqslant u_0\leqslant 2$ Donc P_0 est vraie.

Hérédité

Soit $n\in\mathbb{N}$

Supposons que P_n est vraie. (Hypothèse de récurrence).

Montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que : $-1\leqslant u_n\leqslant 2$ (HR)

Or, *la fonction associée f* est strictement croissante sur $[-1,2]$ (on conserve le sens des inégalités) , donc : $f(-1)\leqslant f(u_n)\leqslant f(2)$. Donc $1\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$

Et comme $-1 < 1$, on a bien : $-1<1\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$, donc $-1\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$.

[*Remarque : ici, on n'a rien calculé !*]

Ce qui montre que P_{n+1} est vraie. Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion. Pour tout entier n : $-1\leqslant u_n\leqslant 2$.

d) Montrons que la suite (u_n) est strictement croissante.C'est-à-dire :

Pour tout entier n, $u_n<u_{n+1}$.

Pour chaque entier n, on appelle P_n la proposition logique:[$u_n<u_{n+1}$].

Montrons par récurrence que : Pour tout entier n : [P_n est vraie].

Initialisation

Pour $n = 0$: $u_0=-1$ et $u_1=1$ donc : $u_0<u_1$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité

Soit $n\in\mathbb{N}$

Supposons que P_n est vraie. (Hypothèse de récurrence).

Montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que : $u_n<u_{n+1}$ (HR)

Donc, d'après la question précédente : $-1\leqslant u_n<u_{n+1}<2$.

Or, *la fonction associée f* est *strictement* croissante sur $[-1,2]$ (on conserve le sens des inégalités) , donc: $f(-1)\leqslant f(u_n)<f(u_{n+1})<f(2)$.

Donc $f(u_n)<f(u_{n+1})$. Ce qui donne : $u_{n+1}<u_{n+2}$.

[*Remarque : ici, on n'a rien calculé !*]

Ce qui montre que P_{n+1} est vraie. Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion. Pour tout entier n :. $u_n<u_{n+1}$.

Donc, la suite (u_n) est strictement croissante.

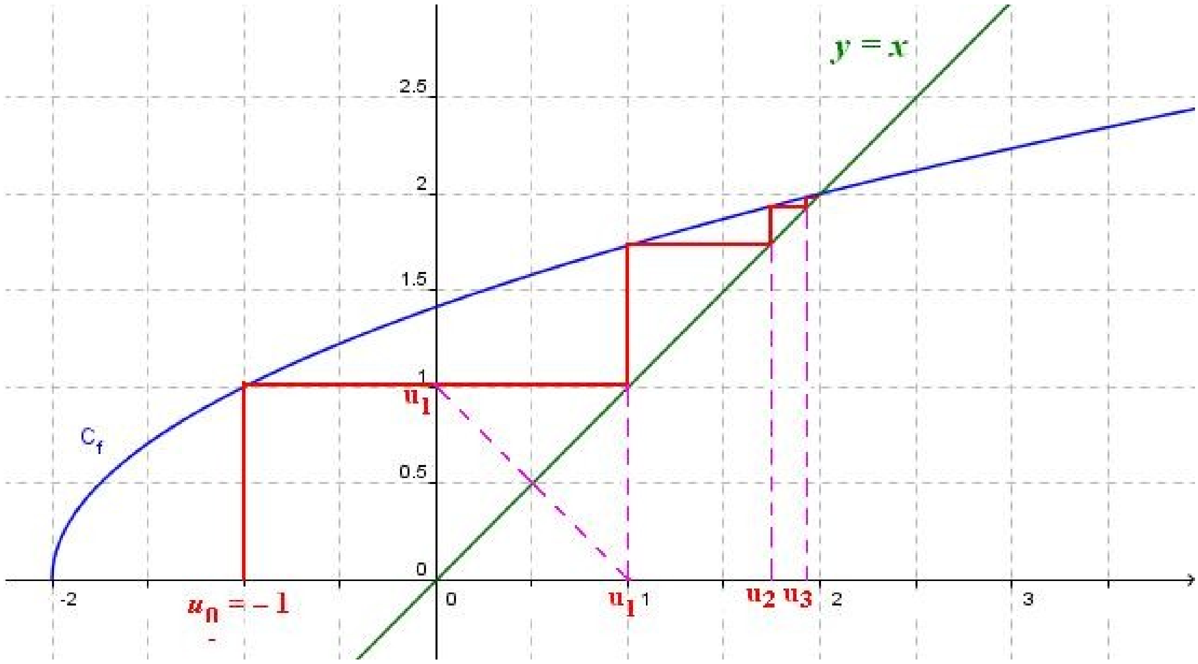
e) Montrons que la suite (u_n) est convergente.

D'après ce qui précède, la suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 2. Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant 2$.

f) *Représentation graphique*.

Dans un repère orthonormé, on construit *la courbe* C_f **et** la droite Δ d'équation « $y = x$ » qu'on appelle aussi « *la première bissectrice* ».

On place u_0 sur l'axe des abscisses. On détermine son image $u_1 = f(u_0)$.
Maintenant, u_1 est sur l'axe des ordonnées, il faut la ramener sur l'axe des abscisses. Pour cela, on construit de symétrique de u_1. Par rapport à Δ . Et on recommence avec u_1.



g) Détermination de la limite de la suite (u_n).

La suite (u_n) est définie par récurrence à l'aide de sa fonction associée comme suit :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = f(u_n), n \geq 0 \end{cases}$$

D'après la question précédente, on sait que la suite (u_n) est convergente.

On pose $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$. Mais la suite (u_{n+1}) est aussi convergente et tend vers la même limite. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$.

La fonction f est continue sur [–1;2], donc l doit vérifier les deux conditions suivantes : $l = f(l)$ et $-1 \leqslant l \leqslant 2$.

On obtient alors : $\begin{cases} l = \sqrt{l+2} \\ -1 \leqslant l \leqslant 2 \end{cases}$ puis, en élevant au carré, on obtient $\begin{cases} l^2 - l - 2 = 0 \\ -1 \leqslant l \leqslant 2 \end{cases}$

Cette équation admet deux solutions [on calcule le discriminant, etc...] : $l = -1$ et $l = 2$
Or, à part u0, tous les termes sont positifs et la suite et strictement croissante. Donc –1 ne peut pas être la limite de la suite. Par conséquent, $l = 2$.

<u>Conclusion</u> : La suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

II Suites arithmético-géométriques

Exemple 2 [type BAC] : Étude complète d'une suite arithmético-géométrique.

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1°) Calculer u_1, u_2 et u_3 .

2° a) Construire dans un même repère (orthonormé) les représentations graphiques des droites (d) d'équation : $y = \frac{1}{2}x + 2$ et Δ d'équation « $y = x$ ».

b) Placer les points d'ordonnées u_0, u_1, u_2 et u_3 et conjecturer *graphiquement* le comportement de la suite (u_n). On choisira une unité appropriée.

3°) On définit une nouvelle suite (v_n) par $v_n = u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n en fonction de n.

c) En déduire une expression de u_n en fonction de n.

4° a) Étudier le sens de variation de la suite (v_n).

b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

5° a) Calculer la limite de la suite (v_n).

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

6° a) Calculer la somme : $S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

b) En exprimant u_n en fonction de v_n , en déduire la somme : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Corrigé :

1°) (u_n) est une suite arithmético-géométrique. La ***fonction associée*** à cette suite est la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

Calcul des premières valeurs. On sait que $u_0 = 10$, $u_1 = f(u_0) = \frac{1}{2} \times 10 + 2 = 7$

$u_2 = f(u_1) = \frac{1}{2} \times 7 + 2 = \frac{11}{2} = 5{,}5$; $u_3 = f(u_2) = \frac{1}{2} \times \frac{11}{2} + 2 = \frac{19}{4} = 4{,}75$; ...

2° a) Représentations graphiques

On se place dans *un repère orthonormé* (O ; I ; J) et on suit les étapes suivantes :

1ère étape : On construit la droite d, *représentation graphique de la fonction affine f.*

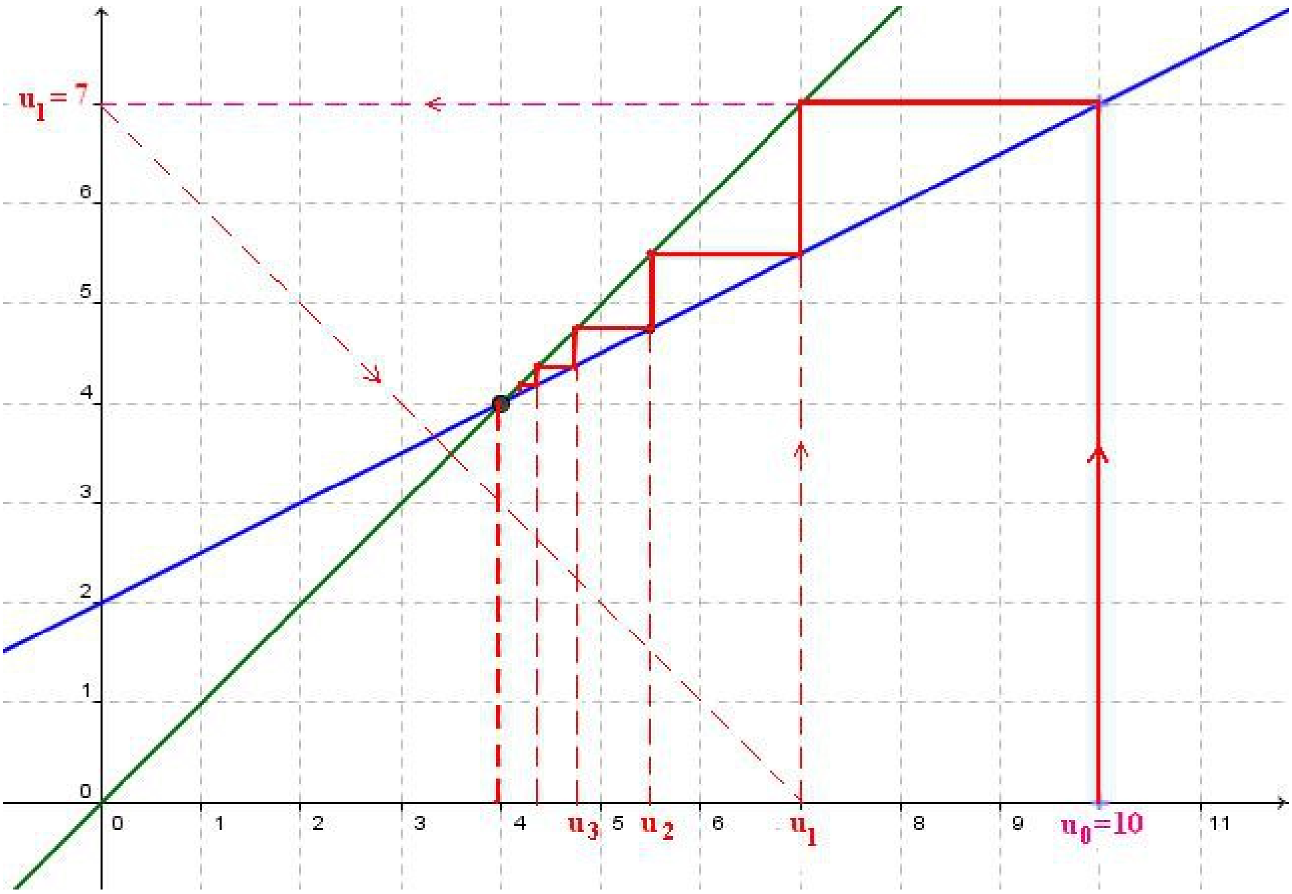
Pour cela, il suffit de calculer les coordonnées de deux points :

- Pour $x = 0$, $y = 2$, donc le point $A(0;2) \in d$;
- Pour $x = 4$, $y = 4$, donc le point $B(4;4) \in d$.

De même, on construit la droite Δ d'équation « $y = x$ » qu'on appelle aussi ***la*** *première bissectrice* du repère.

2ème étape : On place u_0 sur l'axe des abscisses, puis $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.

3ème étape : Afin de placer l'image de u_1, il faut replacer u_1 sur l'axe des abscisses. Pour cela, on construit le symétrique de u_1 par rapport à la première bissectrice Δ . Puis on recommence avec u_1, pour placer u_2, puis u_3,...etc.



2° b) Conjectures : Par lecture graphique :

Conjeture n°1. Il semble que la suite (u_n) soit strictement décroissante et bornée. Tous les termes sont compris entre 4 et 10.

Conjeture n°2. Il semble que la suite (u_n) soit convergente et a pour limite 4, l'abscisse du point d'intersection de la droite d avec la première bissectrice.

Étude de la suite (u_n)

Nous allons utiliser une nouvelle suite, dite « *suite auxiliaire* », (v_n) définie pour tout entier n, de la manière suivante :

$$\boxed{v_n = u_n - 4 \qquad (1)}$$

Qu'on peut traduire immédiatement, pour tout entier n, par :

$$\boxed{u_n = v_n + 4 \qquad (2)}$$

1ère étape : 3°a) Montrons que la suite (v_n) est géométrique.

Pour tout entier n, on a

	$v_{n+1}=u_{n+1}-4$	d'après la relation (1)
Donc	$v_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+2-4$	d'après la relation de récurrence de (u_n)
Donc	$v_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-2$	je calcule 2 – 4
Donc	$v_{n+1}=\frac{1}{2}(v_n+4)-2$	d'après la relation (2)
Donc	$v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n+2-2$	je distribue
Donc	$v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$	je barre les +2 et –2.

De plus, le premier terme de la suite (v_n) est donné par : $v_0 = u_0 - 4 = 10 - 4 = \mathbf{6}$.

Conclusion : La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 6$ et de raison $q=\frac{1}{2}$.

2ème étape : 3°b) Recherche d'une expression explicite de (v_n) en fonction de n.

(v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 6$ et de raison $q=\frac{1}{2}$. Donc

Pour tout entier n, on a :	$v_n=v_0q^n$
donc	$v_n=6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$
ou encore	$v_n=6\times(0{,}5)^n$

3°c) Recherche d'une expression explicite de (v_n) en fonction de n.

D'autre part, d'après la relation (2), on a :

$$u_n=v_n+4 \quad \text{Donc} \quad u_n=6\times(0{,}5)^n+4 \; .$$

Conclusion : Pour tout entier n, on a : $v_n=6\times(0{,}5)^n$ et $u_n=6\times(0{,}5)^n+4$.

3ème étape : 4°a) Étude du sens de variation de la suite (v_n)

La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 6 > 0$ et de raison $q = 0{,}5$.
Comme q est compris entre 0 et 1 et $v_0 > 0$, *la suite (v_n) est <u>strictement décroissante</u>*.

4°b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n)

Comme pour tout entier n, $u_n=v_n+4$, les deux suites (u_n) et (v_n) ont le même sens de variation. Donc, *la suite (u_n) est aussi <u>strictement décroissante</u>*.

4ème étape : 5°a) Déterminer la limite de la suite (v_n).

La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 6$ et de raison $q = 0{,}5$.
Comme $0 < q < 1$, la suite (v_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$.

5°b) En déduire la limite de la suite (u_n).

De plus, d'après la relation (2), pour tout entier n, $u_n = v_n + 4$, donc la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$, abscisse du *point d'intersection* de la droite (d) et la première bissectrice.

5ème étape : 6°a) Exprimer la somme S'_n des $(n+1)$ premiers termes de la suite (v_n) et déterminer sa limite lorsque n tend vers l'infini.

La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 6$ et de raison q = 0,5. Donc, la somme des (n+1) premiers termes de la suite (v_n) est :

$$S_n' = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

Donc : $$S_n' = \frac{v_0 \times (1 - q^{n+1})}{1 - q}$$

Donc : $$S_n' = \frac{6 \times (1 - (0{,}5)^{n+1})}{1 - 0{,}5}$$

Donc : $$S_n' = \frac{6 \times (1 - (0{,}5)^{n+1})}{0{,}5}$$

Par conséquent : $$S_n' = 12 \times \left[1 - (0{,}5)^{n+1}\right]$$

D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}5)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[1 - (0{,}5)^n\right] = 1$. et en multipliant par 8 :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n' = 12$$

6° b) Exprimer la somme S_n des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n) et déterminer sa limite lorsque n tend vers l'infini.

Par ailleurs, d'après la relation (2), pour tout entier n, $u_n = v_n + 4$, donc :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$S_n = (v_0 + 4) + (v_1 + 4) + (v_2 + 4) + \cdots + (v_n + 4)$$
$$S_n = (v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n) + 4 \times (n+1) \quad \text{il y a (n+1) termes}$$
$$S_n = S_n' + 4 \times (n+1)$$

Par conséquent : $$S_n = 12 \times \left[1 - (0{,}5)^{n+1}\right] + 4(n+1)$$

D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n' = 12$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 4(n+1) = +\infty$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

OUF !