Les suites numériques

Ce que dit le programme : Suites arithmétiques et géométriques

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Suites arithmétiques définies par $u_{n+1}=u_n+a$ et une valeur initiale u_0 ou u_1 **Suites géométriques** de raison positive définies par $u_{n+1}=bu_n$ et une valeur initiale positive u_0 ou u_1.	Reconnaître dans une situation « concrète » une suite arithmétique (variation absolue constante) ou une suite géométrique (variation relative constante).	Le tableur est un outil particulièrement adapté à l'introduction des suites arithmétiques et des suites géométriques. L'objectif est de décrire des situations discrètes simples, autant que possible choisies en lien avec les autres enseignements (intérêts simples, intérêts composés, évolution ou actualisation d'un capital, évolution démographique,…). Donner les deux notations u_n et $u(n)$.
Formule explicite.	Calculer le terme de rang n à partir du terme initial et de la raison.	Le tableur permet de comparer formule de récurrence et formule explicite. Les suites géométriques offrent un terrain propice à la consolidation des connaissances sur les puissances.
Représentation graphique.	Exploiter ou réaliser une représentation graphique d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique.	Pour une suite arithmétique, l'alignement des points est démontré en explicitant la fonction affine sous-jacente.
Sens de variation	Reconnaître, selon sa raison, si une suite figurant au programme est croissante ou décroissante. Trouver le premier terme qui franchit un seuil donné et le rang de ce terme.	Les expressions « croissance ou décroissance arithmétique (ou linéaire), géométrique (ou exponentielle) » peuvent être utilisées. Pour une suite géométrique, le terme est obtenu avec le tableur ou la calculatrice.

1. Vocabulaire et notations

1.1) Activité :

Chercher les nombres manquants dans les listes suivantes

L_1 : 0 ; 3 ; 6 ; 9 ; …. ; ….

L_2 : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; …. ; …. ;

L_3 : 10 ; 13 ; 16 ; 19 ; … ; … ;

L_4 : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; … ; … ;

L_5 : 0; 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8; … ; … ;

1.2) Définition

Une suite numérique est une liste de nombres réels « numérotés » avec les nombres entiers naturels en commençant soit à partir de 0 ; soit à partir de 1, ou de 2. La suite se note : (u_n). Le nombre u_n s'appelle le *terme de rang n* ou le *terme d'indice n* ou encore le *terme général* de la suite.

Si u_n est le terme général d'une suite, alors u_{n-1} est le *terme précédent* et u_{n+1} est le *terme suivant* du terme u_n.

Exemples :

Ex. 1°) Les nombres de la liste L_1 définissent la suite des nombres entiers multiples de 3. On peut écrire :

$u_0 = 0$ est le *premier terme* ou le *terme initial*. Elle commence au rang 0.
$u_1 = 3$ est le deuxième terme de la suite. $u_2 = 6$ est le troisième terme de la suite…
Son terme général peut s'écrire : $u_n = 3 \times n$ ou encore $u_n = 3n$. On peut calculer tous les termes suivants. $u_3 = 9$; $u_4 = 12$; $u_5 = 15$ ….

On voit bien que *son terme général s'écrit en fonction de n*. On écrit : $u_n = u(n)$ ou $u_n = f(n)$ comme une fonction définie uniquement sur les nombres entiers.

Remarque : On aurait pu commencer cette suite au rang 1. On écrit :

$u_1 = 0$ est donc le *premier terme* ou le *terme initial* de la suite.
$u_2 = 3$ est le deuxième terme de la suite. $u_3 = 6$ est le troisième terme de la suite…
Son terme général peut s'écrire : $u_n = 3 \times (n-1)$ ou encore $u_n = 3(n-1)$.
On voit bien, ici aussi, que *son terme général s'écrit encore en fonction de n*.

Ex. 2°) Les nombres de la liste L_2 et L_3 définissent aussi deux suites (v_n) et (w_n).
Cette fois, le terme suivant u_{n+1} s'écrit en fonction du terme u_n de la manière suivante :

Liste L_2 : $\begin{cases} v_0 = 1 & \textit{Un (premier) terme donné} \\ v_{n+1} = 2 \times v_n & \textit{Une formule de récurrence} \end{cases}$ Liste L_3 : $\begin{cases} w_0 = 10 \\ w_{n+1} = w_n + 3 \end{cases}$

Ainsi on peut calculer les <u>*termes suivants pas à pas*</u> :
Comme $v_0 = 1$; $v_1 = 2 \times v_0 = 2 \times 1 = 2$; $v_2 = 2 \times v_1 = 2 \times (2) = 4$;
$v_3 = 2 \times v_2 = 2 \times 4 = 8$; $v_4 = 16$; $v_5 = 32$;...

De même, $w_0 = 10$ donc $w_1 = w_0 + 3 = 10 + 3 = 13$; $w_2 = w_1 + 3 = 13 + 3 = 16$;
$w_3 = w_2 + 3 = 16 + 3 = 19$; $w_4 = 22$; $w_5 = 25$; …

Pour la suite L_5, on suppose que les deux premiers termes sont donnés.
Essayez de trouver une relation entre chaque terme et les deux termes précédents.
La suite des termes est : 0;1;1;2;3;5;8;

Testez cette relation : 0+1= 1	Formule : $u_0 + u_1 = u_2$
1+1=2	$u_1 + u_2 = u_3$
1+2 = 3	$u_2 + u_3 = u_4$
2 + 3 = 5	$u_3 + u_4 = u_5$
3 + 5 = ...	et ainsi de suite....

Déterminez les termes suivants.

1.3) Deux types de définition des suites

Définition des suites type 1 :

Lorsque le terme général s'écrit en fonction de l'entier n, on dit que la suite est définie explicitement en fonction de n.

Remarque : On a alors une relation du type $u_n = f(n)$ où u_n est calculé directement à partir de n.

Exemple : calculer les deux premiers termes, puis u_{10} de la suite : $u_n = \dfrac{6}{n(n-1)}$.

Il est clair que u_n est définie à partir de $n = 2$. u_0 et u_1 n'existent pas. Donc :

$$u_2 = \frac{6}{2\times(2-1)} = \frac{6}{2} = 3 \quad ; \quad u_3 = \frac{6}{3\times(3-1)} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{et} \quad u_{50} = \frac{6}{10\times(10-1)} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15} \ .$$

Définition des suites type 2 :

Lorsqu'une suite est définie par la donnée d'un (premier) terme et par une relation qui permet de calculer chaque terme en fonction du terme précédent pas à pas. On dit que la suite est définie par récurrence.

Remarque : Dans la définition d'une suite récurrente, on donne un (premier) terme et une formule de récurrence qui permet de calculer chaque terme en fonction du terme précédent.

Exemple : calculer les deux premiers termes, puis u_{10} de la suite définie par récurrence : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n + 3 \end{cases}$ donc $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$

où g est la fonction $x \to g(x) = 2x + 3$.

Comme $v_0 = 1$; $v_1 = 2\times v_0 + 3 = 2\times 1 + 3 = 5$; $v_2 = 2\times v_1 + 3 = 2\times 5 + 3 = 13$.

Pour calculer v_{10} , il faut calculer v_9 et tous les termes précédents.

C'est trop long pour un calcul à la main ! On peut donc utiliser un tableur ou la calculatrice.

1.4) Avec un tableur

Pour calculer les termes d'une suite avec un tableur :

<table>
<tr><th>Suites définies explicitement</th><th>Suites récurrentes</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>= u(A1)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>=A1+1</td><td>= u(A2)</td></tr>
</table>
Sélectionner A2B2, puis tirer vers le bas, jusqu'à la valeur de n cherchée dans la colonne A. Les termes de la suite sont dans la colonne B.
</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>v_0 (donné)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>=A1+1</td><td>= v(B1)</td></tr>
</table>
Sélectionner A2B2, puis tirer vers le bas, jusqu'à la valeur de n cherchée dans la colonne A. Les termes de la suite sont dans la colonne B.
</td></tr>
</table>

2.4) Avec une calculatrice

Texas : TI82 Stats et modèles sup. *[E] = Enter [V]=Vert*	*Casio : Graph 35+ et modèles sup.*
Taper sur la touche **MODE** Sélectionner **SEQ** ou **SUITE** Sélectionner **Y=**, ou ***f*(*x*)=** , puis : **nMin=...** Valeur du 1er rang = 0 ou 1 **u(n)=...**, Expression suite explicite **u(nMin)=...**, Terme initial à rentrer pour une suite récurrente. **[V]TABLE**, donne la table des valeurs. ***Les flèches de directions permettent d'obtenir les valeurs suivantes.***	Taper sur la touche **MENU** Sélectionner **RECUR** Sélectionner **TYPE (F3)** **an = An+B** , Définition explicite **an+1=Aan+Bn+C**, Suite récurrente **an+2 = Aan+1+Ban+...**, Suite récurrente du 2ème ordre... Hors pgm Rentrer la formule, puis **(F5) SET**, détermine début et fin du rang et le terme initial, suites récurrentes. **(F6) TABLE**, ***donne la table des valeurs.***

Voir [Calculatrices & logiciels dynamiques] (Très complet ! Merci Xavier Delahaye).

2.5) Avec un algorithme

Soit N un entier donné. Calculer la valeur du N-ème terme de suite récurrente de premier terme $u_0 = 1$ et pour tout entier n : $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+10$.

Déclaration de Variables
k un nombre entier
N un nombre entier
U un nombre
Traitement :
Début de l'algorithme
Lire N
Affecter à *k* la valeur 0
Affecter à U la valeur u_0=1
	Pour k allant de 1 à N
	    Debut de Pour
	    Affecter à U la valeur (1/2)*U +10
	    Fin de Pour
	Afficher Message « U(» *En gris, pour*
	Afficher N *l'affichage à l'écran*
	Afficher Message «)= » *de « U(N)= »*
	Afficher U
	Fin de l'algorithme

2. Sens de variations

1.1) Suites croissantes, suites décroissantes

Définition 1 :

1) La suite numérique (u_n) est dite croissante (ssi) pour tout n : $u_{n+1}\geqslant u_n$ (ssi) pour tout n : $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$ (méthode de la différence).
2) La suite numérique (u_n) est dite décroissante (ssi) pour tout n : $u_{n+1}\leqslant u_n$ pour tout n : $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$ (méthode de la différence).
3) La suite numérique (u_n) est dite constante (ou stationnaire) (ssi) pour tout n : $u_{n+1}=u_n$.
4) La suite numérique (u_n) est dite monotone (ssi) elle est croissante ou décroissante.

Comment démontrer qu'une suite est croissante ou décroissante ?

Exemple :

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) de terme général : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

Je calcule la différence de deux termes consécutifs et je cherche son signe.

$$u_{n+1} - u_n = \left[1 + \frac{1}{(n+1)}\right] - \left[1 + \frac{1}{n}\right] = 1 + \frac{1}{(n+1)} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

$u_{n+1} - u_n < 0$ donc $u_{n+1} < u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.

2ème méthode : on étudie le sens de variation de la fonction f associée à la suite (u_n).

Propriété 1. :

Si la suite (u_n) est définie explicitement en fonction de n du type $u_n = f(n)$, la suite (u_n) a le même sens de variations que la fonction associée f sur l'intervalle [0 ; +∞[.

Exemple : Étudier le sens de variation de la suite (u_n) de terme général : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

La fonction f associée à cette suite est définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

Or, on sait que la fonction inverse est décroissante sur]0 ; +∞[, donc la fonction associée f est aussi décroissante sur]0 ; +∞[.

Par conséquent, la suite (u_n) est décroissante.

3. Suites arithmétiques

3.1) Suites arithmétiques définies par récurrence

Définition 1. :

Soit r un nombre réel donné. On dit qu'une suite (u_n) est une ***suite arithmétique de raison r***, lorsqu'on donne un premier terme u_0 et chaque terme s'obtient en ajoutant ***r*** au terme précédent.
Autrement dit : $u_0 \in \mathbb{R}$ est donné et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + r$,

Si le terme initial est u_0.

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \ ... \ u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

Si la suite commence au rang 1, on commence à partir de u_1.

Exemple : La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 0{,}5 \end{cases}$ est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 0{,}5$. Calculons les 2 termes suivants :
Le 2ème terme : $\mathbf{u_1} = u_0 + r = 2 + 0{,}5 = \mathbf{2{,}5}$. Le troisième terme $\mathbf{u_2} = u_1 + r = 2{,}5 + 0{,}5 = \mathbf{3}$.

Comment démontrer qu'une suite est arithmétique ?
Il suffit de calculer et de montrer que la différence $u_{n+1} - u_n =$ constante (indépendante de n). Cette constante est la raison de la suite arithmétique.

3.2) Définition explicite d'une suite arithmétique

Théorème :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
- Si le premier terme est u_0, alors le terme général de la suite est donné par pour tout entier $n \geqslant 0$: $u_n = u_0 + nr$.
- Si le premier terme est u_1, alors le terme général de la suite est donné par pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_n = u_1 + (n-1)\,r$.

Exemple : La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 0{,}5 \end{cases}$ est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 2{,}5$. Calculons u_{10} et u_{50} :
Cette suite commence au rang 0. On utilise la formule $u_n = u_0 + nr$ .Donc :
$\mathbf{u_{10}} = u_0 + 10 \times r = 2 + 10 \times 0{,}5 = \mathbf{7}$ et $\mathbf{u_{50}} = u_0 + 50 \times r = 2 + 50 \times 0{,}5 = \mathbf{27}$.

3.3) Sens de variation et représentation graphique

La fonction associée à la suite arithmétique définie explicitement par : $u(n) = u_0 + n \times r$ est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$; pour tout $x \geqslant 0$: $f(x) = r\,x + u_0$

C'est une *<u>fonction affine</u>* de coefficient directeur r et d'ordonnée à l'origine u_0. On obtient le résultat important suivant :

Théorème :

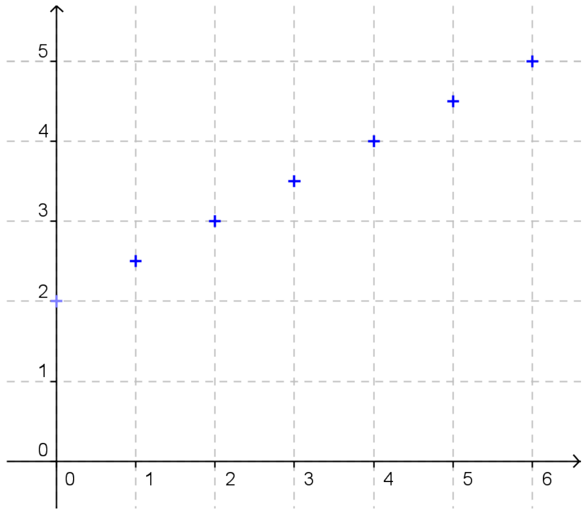
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
- La suite (u_n) est croissante si et seulement si : $\boldsymbol{r > 0}$.
- La suite (u_n) est décroissante si et seulement si : $\boldsymbol{r < 0}$.
- La suite (u_n) est constante si et seulement si : $\boldsymbol{r = 0}$.

Dans les trois cas, la représentation graphique de la suite est un ensemble de points alignés sur une droite de coefficient directeur r et d'ordonnée à l'origine u_0.

Exemple : Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 0{,}5 \end{cases}$ et la représenter dans un repère (O ; I ; J).

Tout d'abord, il s'agit d'une suite arithmétique de premier terme $u_0=2$ et de raison $r = 2{,}5$.

La raison r > 0, donc la suite est strictement croissante.



3.4) Application

Exemple : ex n°1 p.171 La population d'une ville, qui était de 3200 habitant en l'an 2000, augmente chaque année de 250 habitant en moyenne. Combien y avait-il d'habitants en 2001, 2002 ? Quel est le nombre de ses habitants en 2011 si on garde la même tendance ?

Le nombre d'habitants définit une suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 3200$ et de raison $r = 250$. Donc, on peut utiliser la définition pour calculer u_1 et u_2 et les formules pour calculer le u_n de l'an 2011.

$u_1 = u_0 + r = 3200 + 250 =$ **3450** habitants en 2001.
$u_2 = u_1 + r = 3450 + 250 =$ **3700** habitants en 2002.

Pour 2011, il faut d'abord d'abord déterminer le rang de u_n en 2011.
n = 2011-2000 +1 = 12. Donc u_{12} correspond à 2011.

$u_{12} = u_0 + 12 \times r = 3200 + 12 \times 250 = 3200 + 3000 =$ **6200** habitants en 2011.

3. Suites géométriques

3.1) Suites géométriques définies par récurrence

Définition 1. :

Soit q un nombre réel positif. On dit qu'une suite (v_n) est une ***suite géométrique de raison q***, lorsqu'on donne un premier terme v_0 et chaque terme s'obtient en multipliant le terme précédent par q.
Autrement dit : $v_0 \in \mathbb{R}$ est donné et pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = v_n \times q = q\,v_n$.

Si le terme initial est v_0.

$$v_0 \xrightarrow{\times q} v_1 \xrightarrow{\times q} v_2 \xrightarrow{\times q} v_3 \;\cdots\; v_n \xrightarrow{\times q} v_{n+1}$$

Si la suite commence au rang 1, on commence à partir de v_1.

Exemple : La suite définie par $\begin{cases} v_0=3 \\ v_{n+1}=2\times v_n \end{cases}$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $q = 2$. Calculons les 2 termes suivants :
Le 2ème terme : $\mathbf{v_1} = v_0 \times q = 3 \times 2 = \mathbf{6}$. Le troisième terme $\mathbf{v_2} = v_1 \times q = 6 \times 2 = \mathbf{12}$.

Comment démontrer qu'une suite est géométrique ?

Il suffit de calculer et de montrer que le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ = constante (indépendante de n). Cette constante est la raison de la suite arithmétique.

3.2) Définition explicite d'une suite géométrique

Théorème :

Soit q un nombre réel positif. Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.
- Si le premier terme est v_0, alors le terme général de la suite est donné par pour tout entier $n\geqslant 0$: $v_n=v_0\times q^n=v_0 q^n$
- Si le premier terme est v_1, alors le terme général de la suite est donné par pour tout entier $n\geqslant 1$: $v_n=v_1\times q^{(n-1)}=v_1 q^{n-1}$

Exemple : La suite définie par $\begin{cases} v_0=0{,}5 \\ v_{n+1}=2\times v_n \end{cases}$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 0{,}5$ et de raison $q = 2$. Calculons v_{10} et v_{15} :
Cette suite commence au rang 0. On utilise la formule $v_n = u_0 q$. Donc :
$\mathbf{v_{10}} = v_0 \times q^{10} = 0{,}5 \times 2^{10} = 0{,}5 \times 1024 = \mathbf{512}$ et $\mathbf{v_{15}} = v_0 \times q^{15} = 0{,}5 \times 2^{15} = \mathbf{16384}$.

3.3) Sens de variation et représentation graphique

On peut calculer la différence : $v_{n+1} - v_n = v_0q^{n+1} - v_0q^n = v_0q^n(q- 1)$. On sait que $q^n>0$.

On obtient le résultat important suivant :

Théorème :

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme positif $v_0 > 0$.
- La suite (v_n) est croissante si et seulement si : $\boldsymbol{q > 1}$.
- La suite (v_n) est décroissante si et seulement si : $\boldsymbol{q < 1}$.
- La suite (v_n) est constante si et seulement si : $\boldsymbol{q = 1}$.

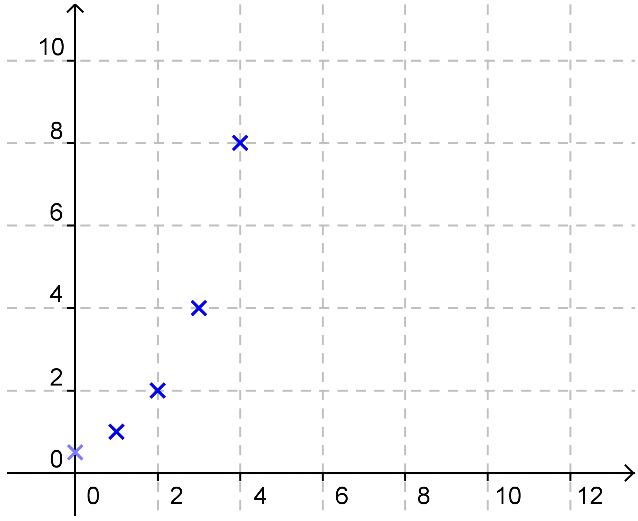
Dans les trois cas, la représentation graphique de la suite est un ensemble de points d'ordonnée à l'origine v_0.

Remarque : Si le premier terme est négatif, $v_0 < 0$, le sens de variation est inversé.

Exemple : Étudier le sens de variation de la suite (un) définie par : $\begin{cases} v_0=0{,}5 \\ v_{n+1}=2\, v_n \end{cases}$ et la représenter dans un repère (O ; I ; J).

Tout d'abord, il s'agit d'une suite géométrique de premier terme $v_0 = 0{,}5$ et de raison $q = 2$.

Le premier terme $v_0 = 0{,}5$ est positif et la raison $q > 1$, donc la suite est strictement croissante.



3.4) Application

Exemple : Le propriétaire augmente le loyer de son appartement de 0,5% par an. Sachant que le loyer annuel est de 7200 € en 2004, calculer le montant des loyers annuels en 2005, 2006 puis en 2011.

Pour augmenter une quantité de 0,5%, on multiplie par : 100%+0,5% =1,005.

Par conséquent, le montant du loyer suit une progression géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 7200$ et de raison $q = 1{,}005$. Donc, on peut utiliser la définition pour calculer u_1 et u_2 et les formules pour calculer le u_n de l'an 2011.

$v_1 = v_0 \times q = 7200 \times 1{,}005 =$ **7236** € de loyer en 2005.
$v_2 = v_1 \times q = 7236 \times 1{,}005 =$ **7272,18** € de loyer en 2006.

Pour 2011, il faut d'abord d'abord déterminer le rang de v_n en 2011.
$n = 2011\text{-}2004 + 1 = 8$. Donc v_8 correspond à 2011. Donc

$v_8 = v_0 \times q^8 = 7200 \times (1{,}005)^8 =$ **7493,09** € de loyer en 20011.