Chapitre 1 ***1ère STMG***

Proportions

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Proportion Proportion d'une sous-population dans une population. Union et intersection de sous-populations. Inclusion.	- Connaître et exploiter la relation entre effectifs et proportion. - Associer proportion et pourcentage. - Pour deux sous-populations *A* et *B* d'une population *E*, relier les proportions de *A*, de *B*, de $A \cap B$ et de $A \cup B$. - Connaître et exploiter la relation entre proportion de *A* dans *B*, de *B* dans *E* et de *A* dans *E*, lorsque $A \subset B$ et $B \subset E$. - Représenter des situations par des tableaux ou des arbres pondérés.	Exemples : taux d'activité, taux de chômage, part de marché, cote de popularité. L'importance de la population de référence est soulignée. On peut étendre l'étude à plusieurs sous-populations disjointes deux à deux ; observer que pour une partition la somme des fréquences vaut 1. La notion de fréquence marginale est rencontrée mais ce vocabulaire n'est pas exigible.

I. Proportions et fréquences

1.1) Population

a) On appelle *population*, un ensemble faisant l'objet d'une étude statistique.

Exemples : l'ensemble des élèves de la classe 1ère STMG ; l'ensemble des entreprises de moins de 10 salariés en France ; l'ensemble des livres d'une bibliothèque forment des populations faisant l'objet d'études statistiques.

b) Les éléments qui constituent une population s'appellent les *individus* de cette population. Le nombre d'individus s'appelle l'*effectif* de la population.

c) La *population de référence* est la population totale sur laquelle porte l'étude.

Exemple : Pour calculer la proportion ou le taux de chômage dans un pays, *la population de référence* considérée est *la population active*, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les personnes en âge de travailler – de 18 à 64 ans – qui sont disponibles sur le marché du travail, qu'ils aient un emploi ou non.

c) Une *sous-population* A d'une population E est *une partie* de cette population. L'effectif de A s'appelle un *effectif partiel*.

Exemples : L'ensemble des chômeurs forme une sous-population de la population active d'un pays. Le groupe A et le groupe des filles de la classe 1ère STMG2 sont des sous-populations de cette classe.

1.2) Calcul d'une proportion

a) Soient une *population de référence*, notée E, et A une sous-population de E. On note n_E l'effectif de la population E et n_A l'effectif partiel de la sous-population A. On appelle *proportion* (ou *fréquence*) de la sous-population A dans la population E le nombre :

$$p_A = \frac{n_A}{n_E}$$

p_A s'appelle aussi la proportion des individus de A parmi les individus de E.

Propriété n°1.

Une proportion est un nombre réel (positif) compris entre 0 et 1.

$$0 \leqslant n_A \leqslant n_E \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant p_A \leqslant 1$$

Exemple :

Soit E l'ensemble des nombres entiers naturels inférieurs à 10. Calculer la proportion des entiers multiples de 4 dans cette population.

> Méthode : On commence par identifier de façon précise la *population de référence* E, la sous-population A et leurs effectifs.
>
> On pose E = {0 ;1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9} et A = {0 ;4 ;8}. L'effectif de E est $n_E = 10$ et l'effectif partiel de A est $n_A = 3$.
>
> Conclusion : La proportion de cette sous-population est : $p_A = \frac{n_A}{n_E} = \frac{3}{10}$.

b) Remarque : On peut écrire une fréquence de trois manières :

- sous la forme d'une *fraction irréductible* $p_A = \frac{3}{10}$;
- sous la forme d'un *nombre décimal compris entre 0 et 1* : $p_A = 0{,}3$;
- ou sous la forme d'un *pourcentage* : $p_A = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = 30\,\%$.

1.3) Calcul d'un effectif

On commence par identifier de façon précise la population de référence E et la sous-population A. On suppose cette fois que la proportion *et* l'un des deux effectifs sont connus.

Propriété n°2.

Pour calculer l'effectif de la sous-population A ou l'effectif de la population E, on écrit la formule de calcul d'une proportion, puis on effectue le produit en croix. Ce qui donne :

$$(1) \quad p_A = \frac{n_A}{n_E} \quad \Rightarrow \quad (2) \quad n_A = p_A \times n_E \quad \Rightarrow \quad (3) \quad n_E = \frac{n_A}{p_A}$$

Exemple : *La classe de 1èreS1 contient 33 élèves dont 30% de filles. Calculer le nombre de filles dans cette classe.*

> E = la population de référence = Classe de 1S1 –> Effectif n_E = 33.
> A = la sous-population concernée = le groupe des filles de 1S1 –> Effectif n_A = ?.

$p_A = 30\% = \frac{30}{100} = 0{,}3$ = proportion des filles dans cette classe. On pose donc :

$p_A = \frac{n_A}{n_E}$ donc $0{,}30 = \frac{n_A}{33}$. On écrit l'égalité des produits en croix : $N_A = 0{,}3 \times 33 = 9{,}9$

Or l'effectif des filles est un nombre entier, donc, on arrondit : $n_A = 10$.

Conclusion : Le nombre de filles dans la classe 1S1 est égal à 10.

1.4) Comparaison d'effectifs et comparaison de proportions

Propriété n°3.

1°) Si deux sous-populations font partie d'une *même population de référence*, alors leurs proportions sont rangées *dans le même ordre* que les effectifs.

2°) Si deux sous-populations font partie de *populations de référence différentes*, alors leurs proportions et les effectifs *ne sont* ***pas forcément*** *rangées dans le même ordre*.

Exemples :

Ex.1°) *Sur les 22 élèves de la classe 1STMG2, il y a 12 filles. Comparer les effectifs et les proportions des filles et des garçons dans cette classe.*

L'effectif de la population de référence est de $n_E = 22$. L'effectif des filles est $n_F = 12$.
Il reste 10 garçons, donc l'effectif des garçons est $n_G = 10$. On a bien $\boldsymbol{n_F > n_G}$.
Les proportions de ces deux sous-populations sont alors :

$p_F = \frac{n_F}{n_E} = \frac{12}{22}$ et $p_G = \frac{n_G}{n_E} = \frac{10}{22}$. On a bien $\boldsymbol{p_F > p_G}$. .

On constate bien que les proportions et les effectifs sont rangés dans le même ordre.

Ex. 2°) *En 2010, il y avait 30 élèves en TS1 et 35 en TS2. 28 élèves ont réussi leur bac en TS1 et 30 en TS2. Comparer les effectifs et les proportions des élèves qui ont réussi au bac dans les deux classes.*

E = classe TS1 et A = le groupe des élèves qui ont réussi au bac en TS1.
F = classe TS2 et B = le groupe des élèves qui ont réussi au bac en TS2.
On a : $n_E = 30$ et $n_A = 28$. De même $n_F = 35$ et $n_B = 30$. . On a bien : $\boldsymbol{n_A < n_B}$..

Par contre : $p_A = \frac{n_A}{n_E} = \frac{28}{30} = 0{,}933... = 93{,}3\%$ et $p_B = \frac{n_B}{n_E} = \frac{30}{35} = 0{,}857... = 85{,}7\%$

Conclusion : On a bien $\boldsymbol{n_A < n_B}$, mais $\boldsymbol{p_A > p_B}$.
On constate bien que les proportions et les effectifs ne sont pas rangés dans le même ordre !

Autre présentation (*On peut faire les calculs sur un tableur*)

Populations de référence	Classe TS1	Classe TS2	Total (2 TS)
Effectif total (pop.Réf.)	30	35	65
Effectif partiel (sous-pop)	28	30	58
Proportions	$p_A = \frac{28}{30} = 93{,}30$	$p_A = \frac{30}{35} = 85{,}7$	$p_A = \frac{58}{65} = 89{,}2$

II. Proportions et réunions

2.1) Réunion et intersection

a) On considère deux sous-populations A et B d'une même population de référence E. On note $A\cap B$ la sous-population de E, constituée de tous les individus de E qui sont à la fois dans A et dans B.

$A\cap B$ est l'ensemble des individus communs à A et B.

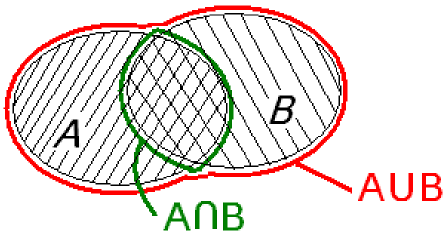
$A\cap B$ s'appelle *l'intersection* de A et B.

b) De même, on note $A\cup B$ la sous-population de E, constituée de tous les individus de E qui sont soit dans A, soit dans B, ou les deux ; donc ceux qui appartiennent au moins, à une des deux sous-populations A ou B.

$A\cup B$ s'appelle *la réunion* de A et B.

On note alors $n_A, n_B, n_{A\cap B}$ et $n_{A\cup B}$ les effectifs et $p_A, p_B, p_{A\cap B}$ et $p_{A\cup B}$ les proportions des sous-populations A, B, $A\cap B$ et $A\cup B$ dans la population E respectivement.

Schéma représentatif



Pour calculer l'effectif de $A\cup B$, si on additionne n_A+n_B , on compte *deux fois* les individus qui sont dans $A\cap B$. Ce qui donne $n_{A\cup B}=n_A+n_B-n_{A\cap B}$

Et, par suite, si on divise les deux membres par n_E , on obtient :

$$\frac{n_{A\cup B}}{n_E}=\frac{n_A}{n_E}+\frac{n_B}{n_E}-\frac{n_{A\cap B}}{n_E}$$

Ce qui donne pour les proportions : $p_{A\cup B}=p_A+p_B-p_{A\cap B}$

Propriété n°3.

1°) Si deux sous-populations A et B font partie d'une même population de référence, de proportions p_A et p_B, alors l'effectif et la proportion de leur réunion sont donnée par :

$$n_{A\cup B}=n_A+n_B-n_{A\cap B} \quad \text{et} \quad p_{A\cup B}=p_A+p_B-p_{A\cap B}$$

Exemple : **Fromage ou dessert !?**

A la fin d'un banquet, 86% des convives ont commandé un fromage, 94% des convives ont commandé un dessert et 81% ont commandé un fromage ***et*** *un dessert.*
Calculer la proportion des convives qui ont commandé un fromage ***ou*** *un dessert.*

La population de référence E = l'ensemble de tous les convives = 100%
La sous-population A = les convives qui ont commandé un fromage : $p_A=86\%=0,86$.
La sous-population B = les convives qui ont commandé un dessert : $p_B=94\%=0,94$.
$A\cap B$ *= la sous-population des convives qui ont commandé un fromage et un dessert :*
$p_{A\cap B}=81\%=0,81$.

$A \cup B$ = la sous-population des convives qui ont commandé un fromage ou un dessert :
Par conséquent : $p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}$ *= 0,86 + 0,94 – 0,81 = 0,99 = 99%.*
Conclusion : 99% des convives ont commandé un fromage ou un dessert.

Présentation dans un tableau croisé :
On peut présenter le problème dans un tableau. On note (en bleu) tout ce qu'on sait et on remplit (en rouge) les cases vides en complétant les différents totaux :

Répartition	*A* = Fromage	$\overline{A}$ = Pas de fromage	Total
B = Dessert	**81**	13	**94**
$\overline{B}$ =Pas de dessert	5	1	6
Total	86	14	**100**

Ainsi, sur 100 convives, 86 ont pris un fromage, dont 81 ont aussi pris un dessert. Dont il n'y a que 5 qui ont pris un fromage, mais pas de dessert. Et ainsi de suite…
Finalement, 1 convive n'a pris ni fromage ni dessert. Il reste 99 sur les 100 qui ont commandé fromage ou dessert.
Conclusion : 99% des convives ont commandé un fromage ou un dessert.

2.2) Sous-populations disjointes

Définition : On dit que deux sous-populations A et B d'une même population E sont disjointes lorsqu A et B n'ont aucun individu en commun. Donc $\boxed{A\cap B=\emptyset}$
On a alors : $n_{A\cap B}=0$. Donc $p_{A\cap B}=0$. D'où $p_{A\cup B}=p_A+p_B$.

Propriété n°4.

Si deux sous-populations A et B d'une même population de référence sont disjointes, alors la proportion de leur réunion est donnée par : $\boxed{p_{A\cup B}=p_A+p_B}$

Exemple : *Une équipe de judo compte 40 personnes dont 10 adultes. Le groupe des jeunes est formé de 16 filles et 14 garçons. 1°) Calculer la proportion des garçons, des filles et des jeunes dans cette équipe. 2°) Que constatez-vous ? Pourquoi ?*

1°) La population de référence E = l'ensemble de l'équipe de judo. Donc $n_E=40$.

A = le groupe des filles. Donc $n_A=16$ et $p_A=\frac{n_A}{n_E}=\frac{16}{40}=0{,}40=40\%$

B = le groupe des garçons. Donc $n_B=14$ et $p_B=\frac{n_B}{n_E}=\frac{14}{40}=0{,}35=35\%$

$A\cup B$ = le groupe des jeunes. $n_{A\cup B}=30$ et $p_{A\cup B}=\frac{n_{A\cup B}}{n_E}=\frac{30}{40}=0{,}75=75\%$

2°) On constate que : $p_{A\cup B}=0{,}75=0{,}40+0{,}35=p_A+p_B$.
En effet, les deux sous-populations A et B n'ont *aucun point commun*, elles sont *disjointes*.
Donc, on aurait pu appliquer directement la propriété n°4.

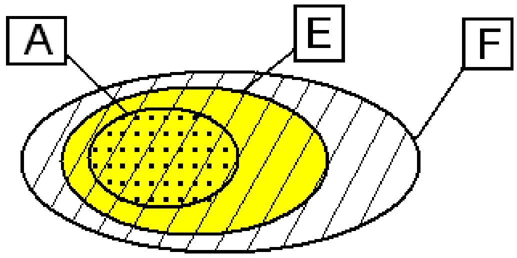
3.2) Cas particulier

Définition : Soit E une population de référence et A une sous-population.
Les individus de E qui n'appartiennent pas à la sous-population A forment la sous-population contraire, notée $\overline{A}$.

Théorème : La proportion de $\overline{A}$ dans E est donnée par : $p_{\overline{A}}=1-p_A$.

III. Proportions échelonnées

On considère trois populations A, E et F, où A est une sous-population de E et E est une sous-population de F comme l'indique le schéma ci-dessous :



On note alors n_A, n_E, n_F les effectifs de A, E et F respectivement. On note p la proportion de la sous-population A dans la population E, p' la proportion de la sous-population E dans la population F et P la proportion de la sous-population A dans la population F.

On a alors : $p = \dfrac{n_A}{n_E}$; $p' = \dfrac{n_E}{n_F}$ et $P = \dfrac{n_A}{n_F}$.

Ce qui donne : $P = \dfrac{n_A}{n_F} = \dfrac{n_A \times n_E}{n_E \times n_F} = \dfrac{n_A}{n_E} \times \dfrac{n_E}{n_F} = p \times p'$

Propriété n°5 :

On considère trois populations A, E et F où A est une sous-population de E et E une sous-population de F. Si p est la proportion de A dans E et p' est la proportion de E dans F, alors la proportion P de A dans F est : $P = p \times p'$

Exemple : Au lycée Fustel de Coulanges, la proportion des élèves de 1ère STMG dans l'ensemble des premières est de 20% et la proportion de l'ensemble des premières dans l'ensemble des élèves du lycée est de 15%.
Déterminer la proportion des élèves de 1ère STMG dans l'ensemble du lycée.

Soit F = la population des élèves du lycée, E = la sous-population F des élèves de premières et A = la sous-population de E des élèves de 1ère STMG.

La proportion de la sous-population A dans la population E est : $p = 20\% = \dfrac{20}{100} = 0,2$.

La proportion de la sous-population E dans la population F est : $p' = 15\% = \dfrac{15}{100} = 0,15$

Donc, si on note P la proportion de la sous-population A dans F, alors :

$P = p \times p' = 0,2 \times 0,15 = 0,03 = \dfrac{3}{100} = 3\%$.

Conclusion : la proportion des élèves de 1ère STMG dans l'ensemble du lycée est de 3%.

