Lycée Fustel de Coulanges **1ère S1** Le 19/11/2011
91300 MASSY

Corrigé du contrôle de de mathématiques n°3
<u>*Calculatrice autorisée*</u>

<u>Exercice 1</u> : 3 pts

ABC est un triangle et O est un point quelconque du plan. Le point I est le milieu de [AC] et P est un point du plan tel que :

$$\vec{OP}=\vec{OA}-2\vec{OB}+\vec{OC}$$

1°) Exprimer $\vec{OA}+\vec{OC}$ *en fonction de* $\vec{OI}$.
2°) Démontrer que les droites (OP) et (IB) sont parallèles.

1°) D'abord, comme I est le milieu de $[AC]$, on peut écrire plusieurs égalités vectorielles (théorème7). En particulier : $\vec{IA}+\vec{IC}=\vec{0}$
D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}\vec{OA}+\vec{OC}&=\vec{OI}+\vec{IA}+\vec{OI}+\vec{IC} && \text{D'après la relation de Chasles ;}\\ &=\vec{OI}+\vec{OI}+\vec{IA}+\vec{IC} && \text{On peut changer l'ordre des vecteurs ;}\\ &=2\vec{OI}+\vec{0} && \text{I milieu de } [AC] \text{ ;}\\ &=2\vec{OI} && \vec{0} \text{ est « neutre » pour l'addition}\end{aligned}$$

Conclusion $\vec{OA}+\vec{OC}=2\vec{OI}$

2°) O est un point quelconque du plan et P est un point du plan tel que :

$$\vec{OP}=\vec{OA}-2\vec{OB}+\vec{OC}$$

Pour montrer que les droites (OP) et (IB) sont parallèles, il suffit de démontrer que les deux vecteurs $\vec{OP}$ et $\vec{IB}$ sont colinéaires.

Nous allons partir de l'expression de $\vec{OP}$ et « couper » par le point I. On a :

$$\begin{aligned}\vec{OP}&=\vec{OA}-2\vec{OB}+\vec{OC}\\ &=-2\vec{OB}+\vec{OA}+\vec{OC} && \text{On peut changer l'ordre des vecteurs ;}\\ &=-2\vec{OB}+\left(\vec{OA}+\vec{OC}\right) && \text{On peut faire des groupements de vecteurs ;}\\ &=2\vec{BO}+2\vec{OI} && \text{D'après la question 1°)}\\ &=2\left(\vec{BO}+\vec{OI}\right) && \text{Je mets 2 en facteur}\\ &=2\vec{BI} && \text{D'après la relation de Chasles.}\\ &=-2\vec{IB} && \text{Vecteurs opposés}\end{aligned}$$

Par conséquent : $\vec{OP}=-2\vec{IB}$

Conclusion : Les deux vecteurs $\vec{OP}$ et $\vec{IB}$ sont colinéaires, donc les deux droites (OP) et (IB) sont parallèles.

CQFD.

Exercice 2 : 7 pts

ABC est un triangle. I est le milieu du segment [AB]. Les points J et K sont tels que :

$$\overrightarrow{JC}=\frac{1}{5}\overrightarrow{JA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{KB}=-5\overrightarrow{KC}$$

1°) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ *et* $\overrightarrow{AK}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.

2°) En déduire les coordonnées des points I, J et K dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

3°) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ *et* $\overrightarrow{IK}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$

4°) Démontrer que les points I, J et K sont alignés.

BONUS : 2ème méthode *:*

5°) Déterminer une équation de la droite (IJ) dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

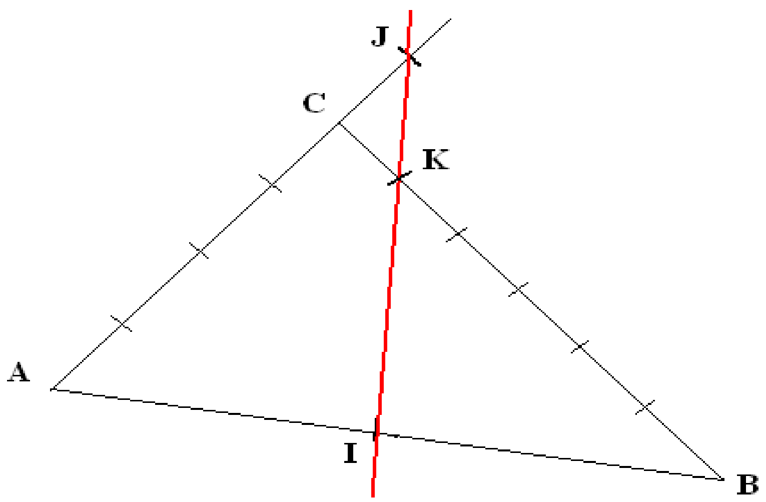
6°) Démontrer que $K\in(IJ)$ *. Conclure.*

1°) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Je commence par me débarrasser des fractions et je raisonne par implications logiques.

$\overrightarrow{JC}=\frac{1}{5}\overrightarrow{JA}$	$\Rightarrow$	$5\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{JA}$	Je peux placer le point J sur la figure.
	$\Rightarrow$	$5(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{JA}$	D'après le relation de Chasles
	$\Rightarrow$	$5\overrightarrow{JA}+5\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{JA}$	Je distribue
	$\Rightarrow$	$-5\overrightarrow{AJ}+5\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AJ}$	Vecteurs opposés
	$\Rightarrow$	$-5\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AJ}=-5\overrightarrow{AC}$	Je transpose
	$\Rightarrow$	$-4\overrightarrow{AJ}=-5\overrightarrow{AC}$	Je simplifie
	$\Rightarrow$	$\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$	Je divise par – 4

De même, $\overrightarrow{KB}=-5\overrightarrow{KC}$, donc je peux placer le point K sur la figure. D'autre part :

$\overrightarrow{KB}=-5\overrightarrow{KC}$	$\Rightarrow$	$\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}=-5(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AC})$	D'après le relation de Chasles
	$\Rightarrow$	$\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}=-5\overrightarrow{KA}-5\overrightarrow{AC}$	Je distribue
	$\Rightarrow$	$-\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{AK}-5\overrightarrow{AC}$	Vecteurs opposés
	$\Rightarrow$	$-6\overrightarrow{AK}=-\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}$	Je transpose
	$\Rightarrow$	$6\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}$	Je simplifie
	$\Rightarrow$	$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$	Je divise par 6.



2°) Comme I est le milieu de [AB], on sait que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc les coordonnées de I dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ sont : $I\left(\frac{1}{2};0\right)$.

De même, on sait que : $\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$ donc les coordonnées de J dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ sont : $J\left(0;\frac{5}{4}\right)$.

De même, on sait que : $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$ donc les coordonnées de K dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ sont : $K\left(\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$.

3°) Calcul des coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$:

<u>1ère méthode</u> : J'utilise les égalités vectorielles et la relation de Chasles :

$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$.

De même :

$\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AK}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{IK}\left(-\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)$

<u>2ème méthode</u> : J'utilise les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{cases} x_J-x_I=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2} \\ y_J-y_I=\frac{5}{4}-0=\frac{5}{4} \end{cases} \text{ donc } \overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$$

De même :

$$\overrightarrow{IK}\begin{cases} x_K-x_I=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3} \\ y_K-y_I=\frac{5}{6}-0=\frac{5}{6} \end{cases} \text{ donc } \overrightarrow{IK}\left(-\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)$$

3°) Les points I, J et K sont-ils alignés ?

Il faut vérifier si les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.

<u>1ère méthode</u> : J'utilise les égalités vectorielles. $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$ On voit bien que $4\overrightarrow{IJ}=6\overrightarrow{IK}$ donc $\overrightarrow{IJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{IK}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.

<u>Conclusion</u> : Les points I, J et K sont alignés.

2ème méthode : J'utilise les coordonnées des vecteurs et la propriété analytique de colinéarité. On sait que :

$\vec{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2};\frac{5}{4}\end{pmatrix}$ et $\vec{IK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3};\frac{5}{6}\end{pmatrix}$. Je calcule la différence des produits en croix :

$$xy'-x'y=-\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}-\frac{5}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{12}+\frac{5}{12}=0$$

Par conséquent, les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$ sont colinéaires.

Conclusion : Les points I, J et K sont alignés.

BONUS : 2ème méthode :

5°) Déterminer une équation de la droite (IJ) dans le repère $(A;\vec{AB},\vec{AC})$.

$I\begin{pmatrix}\frac{1}{2};0\end{pmatrix}$ $J\begin{pmatrix}0;\frac{5}{4}\end{pmatrix}$ et $K\begin{pmatrix}\frac{1}{6};\frac{5}{6}\end{pmatrix}$

Je commence par chercher les coordonnées du vecteur directeur de la droite (*IJ*) :

$$\vec{IJ}\begin{cases}x_J-x_I=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\\ y_J-y_I=\frac{5}{4}-0=\frac{5}{4}\end{cases}\quad \text{donc}\quad \vec{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2};\frac{5}{4}\end{pmatrix}.$$

Soit $M(x;y)$ un point quelconque du plan. Je calcule les coordonnées du vecteur :

$\vec{IM}(x-x_I;y-y_I)$ donc $\vec{IM}\begin{pmatrix}x-\frac{1}{2};y\end{pmatrix}$

Je raisonne par équivalences successives.

$$\begin{aligned}M\in(IJ) &\Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \vec{IM} \text{ et } \vec{IJ} \text{ sont colinéaires}\\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)\times\frac{5}{4}-y\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \qquad (\text{On écrit } x\,y'-x'y=0)\\ &\Leftrightarrow \frac{5}{4}x-\frac{5}{8}+\frac{1}{2}y=0\\ &\Leftrightarrow \frac{5}{4}x+\frac{1}{2}y=\frac{5}{8} \quad \text{et en multipliant par 8 des deux côtés}\\ &\Leftrightarrow 10x+4y=5 \quad \text{équation générale de } (IJ).\end{aligned}$$

ou encore en multipliant par 2 des deux côtés, on obtient l'équation réduite de (*IJ*) :

$$y=-\frac{5}{2}x+\frac{5}{4}$$

6°) Montrons que le point $K\in(IJ)$. Or $K\begin{pmatrix}\frac{1}{6};\frac{5}{6}\end{pmatrix}$

$-\frac{5}{2}\times x_K+\frac{5}{4}=-\frac{5}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{5}{4}=-\frac{5}{12}+\frac{15}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}=y_K$. Donc $K\in(IJ)$.

Conclusion : Les points *I, J* et *K* sont alignés.

La suite, très bientôt