Chapitre 3

Vecteurs et colinéarité

Ce que dit le programme :

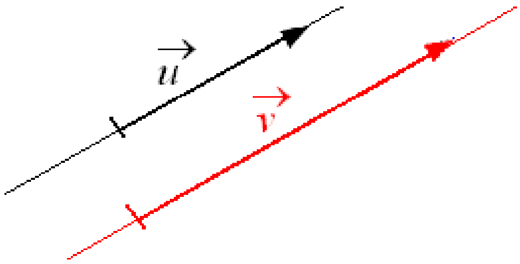
Géométrie plane. Vecteurs Condition de colinéarité de deux vecteurs : xy' – x'y .		
Vecteur directeur d'une droite. Équation cartésienne d'une droite.	*Utiliser la condition de colinéarité pour obtenir une équation cartésienne de droite.* Déterminer une équation cartésienne de droite connaissant un vecteur directeur et un point. Déterminer un vecteur directeur d'une droite définie par une équation cartésienne.	*On fait le lien entre coefficient directeur et vecteur directeur.* L'objectif est de rendre les élèves capables de déterminer efficacement une équation cartésienne de droite par la méthode de leur choix.
Expression d'un vecteur du plan en fonction de deux vecteurs non colinéaires.	*Choisir une décomposition pertinente dans le cadre de la résolution de problèmes.*	*On ne se limite pas au cadre de la géométrie repérée.*

I. Vocabulaire et définitions

1.1) Rappels

Définition 1.

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** lorsqu'ils ont la même direction.



Théorème 1.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** si et seulement si, il existe un nombre réel k, tel que : $\vec{v}=k\vec{u}$ si et seulement si, il existe un nombre réel k', tel que : $\vec{u}=k'\vec{v}$

Remarque :

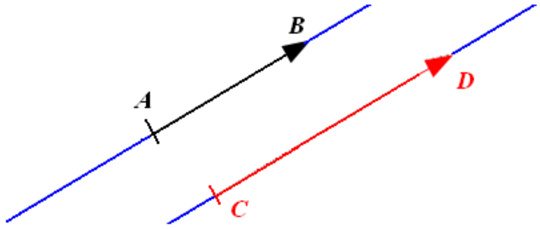
Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire que, dans tout repère du plan, leurs coordonnées sont proportionnelles.

Soient $\vec{u}$ $(x;y)$ et $\vec{v}$ $(x';y')$ deux vecteurs colinéaires . Donc, il existe un réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$. Donc : $x'=kx$ et $y'=ky$.

1.2) parallélisme et alignement

Théorème 2.

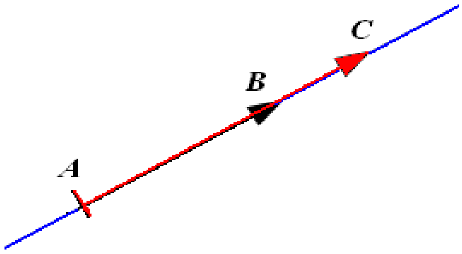
Soit A, B, C et D quatre points du plan. Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, si et seulement si, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



Rappel : Si deux droites sont parallèles et ont un point commun, alors elles sont confondues (5ème). D'où la propriété importante suivante qui permet de démontrer que trois points sont alignés.

Théorème 3.

Soient A, B, et C trois points du plan. Les trois points A, B et C sont alignés, si et seulement si, deux des trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.



1.3) Milieu d'un segment

Théorème 4.

Soit A, B et I trois points du plan. Le point I est le milieu du segment [AB]

si et seulement si, l'une des conditions suivantes est réalisée : 1°) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$;

2°) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; 2°') $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$; 3°) $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; 4°) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$;...

1.4) Condition analytique de la colinéarité

Analytique = « qui utilise les coordonnées dans un repère donné ».

Théorème 4.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $(x\,;\,y)$ et $(x'\,;\,y')$ respectivement dans un repère (O, I, J). Alors :

Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si : $\boldsymbol{xy'-x'y=0}$.

Démonstration :

($\longrightarrow$) Supposons que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires .

Donc, d'après le théorème 1, il existe un réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.

Donc $x'= k\,x$ et $y'= k\,y$. Mais alors, on a bien : $xy' - x'y = x.ky - kx.y = kxy - kxy = 0$.

Par conséquent : [Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $xy' - x'y = 0$].

Réciproquement

($\longleftarrow$) Supposons que $xy' - x'y = 0$ (*)

1er cas : Si $\vec{u}=\vec{0}$. Alors $\vec{u}=0.\vec{v}$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires .

2ème cas : Si $\vec{u}\neq\vec{0}$. Alors l'une au moins des deux coordonnées de $\vec{u}$ est non nulle. Par exemple, supposons que $x\neq 0$.

Mais alors, d'après l'égalité (*), on peut écrire : $xy' = x'y$, donc $y'=\frac{x'}{x}y$.

Posons alors : $k=\frac{x'}{x}$ .Il en résulte que :

d'une part : $x' = kx$ et d'autre part, comme $y'=\frac{x'}{x}y$, on a $y' = ky$. D'où le resultat.

Par conséquent : [Si $xy' - x'y = 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires].

Conclusion :

Pour démontrer une équivalence, nous avons fait un raisonnement par double implication. Ce qui montre que les deux propositions logiques « Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires » et « $xy' - x'y = 0$» sont équivalentes.

Exemple :

Déterminer toutes les valeurs du réel m pour que les deux vecteurs $\vec{u}(m\,;\frac{1}{2})$ et $\vec{v}(\frac{3}{2}\,;\sqrt{2})$ soient colinéaires.

Ici, nous allons faire un raisonnement par équivalence (directement).

Soit $m\in\mathbb{R}$. [(ssi) = «si et seulement si » = $.\Leftrightarrow.$]

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (ssi) $m\times\sqrt{2}-\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=0$

(ssi) $m\sqrt{2}=\frac{3}{4}$ (ssi) $m=\frac{3}{4\sqrt{2}}$ (ssi) $m=\frac{3\times\sqrt{2}}{4\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$ (ssi) $m=\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

Conclusion : Il n'y a qu'une seule valeur de *m* vérifiant cette condition.

II. Décomposition d'un vecteur dans le plan

2.1) Repères du plan

Définition 2.

Trois points A, B, C non alignés du plan définissent un repère (A, B, C) de ce plan.

En effet ;

- Si les points A, B et C sont alignés, ils appartiennent à une même droite du plan, donc ne définissent pas un repère du plan.

- Si A, B et C sont non alignés, on choisit A comme origine du repère. Les deux axes (AB) et (AC) sont sécants en A. Donc ils définissent un repère (A, B, C) du plan.
(AB) = axe des abscisses avec unité AB et (AC) = axe des ordonnées avec unité AC.

Avec les vecteurs :

Si A, B, C sont *non alignés*, les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont *non colinéaires* :

- On choisit A comme *origine du repère* ;
- On choisit *deux vecteurs non colinéaires*. Par exemple : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Le triplet (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) définit donc un repère du plan.

Dans la suite : Le repère (O ; I, J) sera noté (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) où $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$.

Définition 3.

Soit (O; I, J) un repère du plan.

1°) On dit que (O; I, J) est un *repère orthogonal* lorsque $(OI)\perp(OJ)$ c'est-à-dire si (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.

2°) On dit que (O; I, J) est un *repère orthonormé* ou *orthonormal* lorsque :

- $(OI)\perp(OJ)$. Les deux axes (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.
- et $OI = OJ$. On choisit la même unité sur les deux axes.

2.2) Repérage d'un point ou d'un vecteur dans le plan

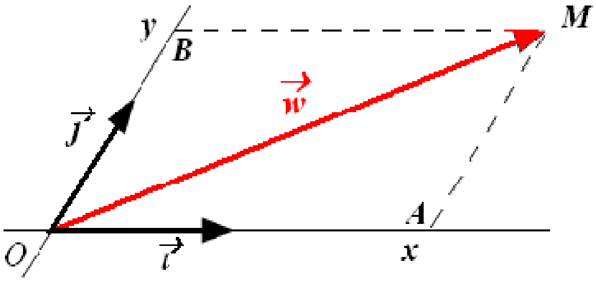
Théorème 5.

Soit (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère quelconque du plan.

1°) Un point M a pour coordonnées (*x ; y*) dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) si et seulement si le vecteur s'écrit : $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$

2°) Un vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées (*x ; y*) dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) si et seulement si le vecteur s'écrit : $\vec{w}=x\vec{i}+y\vec{j}$

On utilise la relation de Chasles ou la règle du parallélogramme.



2.3) Expression d'un vecteur en fonction de deux vecteurs non colinéaires

Théorème 6.

Soient A, B et C trois points non alignés du plan. Alors, pour tout point M du plan, il existe un couple unique de nombres réels (x ; y) tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$$

(x ; y) sont les coordonnées du point M dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$)

D'une manière analogue :

Théorème 7.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan. Alors, pour tout vecteur $\vec{w}$ du plan, il existe un couple unique de nombres réels (x ; y) tels que :

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

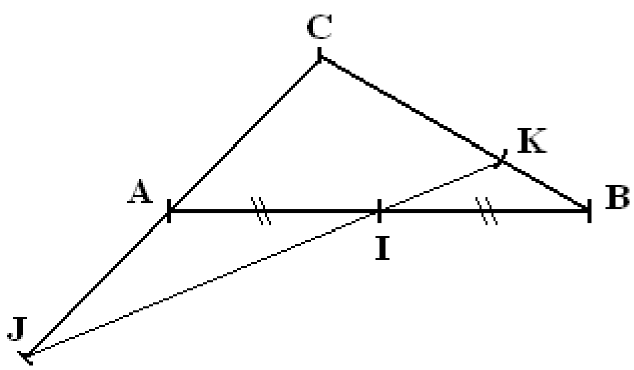
(x ; y) sont les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans tout repère (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) où O est un point quelconque du plan.

Exercice type : *ABC est un triangle. I est le milieu de [AB]. Les points J et K sont définis par les égalités vectorielles :* $\overrightarrow{JC} = 2\,\overrightarrow{JA}$ *et* $\overrightarrow{KB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}$.

1°) Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ *et* $\overrightarrow{AK}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$

2°) Démontrer que les points I, J et K sont alignés.

Corrigé de l'exercice type : D'abord, on fait une figure au fur et à mesure. Comme ABC un triangle non aplati, $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right)$ est un repère du plan.



1°) *Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$*

On sait que : I est le milieu du segment [AB]. Donc, on dispose de plusieurs formules

$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}\ ;\ \overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}\ ;\ \overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}\ ;...$$

a) Par hypothèse, on sait que : $\overrightarrow{JC}=2\overrightarrow{JA}$, donc grâce à la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AJ}$, donc $-\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AJ}$, donc $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AJ}$, donc $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AJ}$. (*Ici, on raisonne par implications dans le texte : on sait que..., or... donc,... donc...*).

Par conséquent : $\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AC}$ (→ figure). Ce qui signifie que A est le milieu de [CJ] ou encore que J est le symétrique de C par rapport à A.

b) Par hypothèse, on sait aussi que : $\overrightarrow{KB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}$ donc $2\overrightarrow{KB}=-\overrightarrow{KC}$ (→ figure);

donc on peut faire *un raisonnement par implications successives* comme suit :

$$\overrightarrow{KB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{KC} \Rightarrow 2\overrightarrow{KB}=-\overrightarrow{KC} \text{ et grâce à la relation de Chasles,}$$

$$\Rightarrow 2\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}\right)=-\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow -2\overrightarrow{AK}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow -2\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AK}=-2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow -3\overrightarrow{AK}=-2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

2°) *Montrons que les points I, J et K sont alignés.*

Pour cela, il suffit de démontrer que deux des trois vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires. Exprimons $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$. On a :

$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ puisque I est le milieu de [AB].

D'autre part : $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$, les coordonnées des deux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ sont :

$\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2};-1\right)$ et $\overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right)$. On voit bien que $\overrightarrow{IJ}=-3\overrightarrow{IK}$.

Par conséquent, les deux vecteurs sont colinéaires.

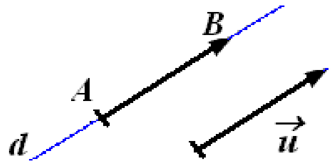
Conclusion : Les trois points *I, J* et *K* sont bien alignés. CQFD.

III. Équation cartésienne d'une droite

3.1) Vecteur directeur d'une droite

Définition 2.

Un *vecteur directeur* d'une droite ***d*** est un vecteur non nul de direction ***d***.



Exemple : si A et B sont deux points distincts de ***d***, alors $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite ***d***.

Théorème 8.

Soient ***d*** et ***d'*** deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement. Alors :
1°) Pour tout réel *k* non nul, $k\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de ***d***.
2°) Les droites *d* et *d'* sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

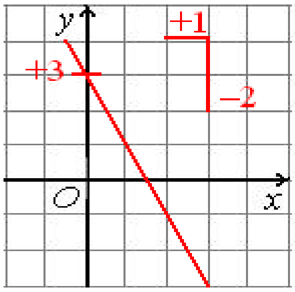
3.2) Équation cartésienne d'une droite

Nous savons déjà que, dans un repère quelconque, l'*équation cartésienne d'une droite* ***d*** (sous sa forme générale) s'écrit : $ax+by=c$, où *a, b* et *c* sont des nombres réels donnés. *a, b* *non tous deux nuls*.

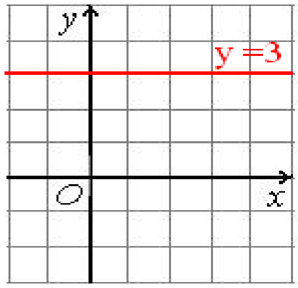
Théorème 9. Équation cartésienne réduite d'une droite :

1°) Toute droite D *non parallèle à l'axe des ordonnées* a une équation de la forme $y=mx+p$ où *m* et *p* sont deux nombres réels. Cette équation y = *mx* + *p* est appelée *l'équation réduite* de la droite D. ***m*** s'appelle le *coefficient directeur* et ***p*** s'appelle *l'ordonnée à l'origine* de D. 2°) Toute droite D *parallèle à l'axe des ordonnées* (verticale) a une équation de la forme $x = c$ où c est un nombre réel. Ce qui signifie que tous les points de la droite D ont la même abscisse *x* = c.

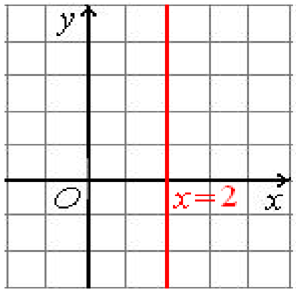
Remarque : Une droite *parallèle à l'axe des abscisses* (horizontale) rentre dans le premier cas. Son équation est de la forme $y=c$ où *c* est un nombre réel.
Ce qui signifie que tous les points de la droite D ont la même ordonnée *y* = c.



D_1 a pour équation $y = -2x + 3$.
Coefficient directeur $m = -2$; ordonnée à l'origine $p = 3$.
$a = 2$; $b = 1$ et $c = 3$.
Vecteur directeur :
$\vec{u}_1(1;-2)$



D_2 a pour équation $y = 3$.
Coefficient directeur $m = 0$.
D_2 est parallèle à l'axe des abscisses.
Ordonnée à l'origine $p = 3$.
$a = 0$; $b = 1$ et $c = 3$.
Vecteur directeur :
$\vec{u}_2(1;0)$; $\vec{u}_2=\vec{i}$



D_3 a pour équation $x = 2$.
D_3 n'a pas de coefficient directeur.
D_3 est parallèle à l'axe des ordonnées.
$a = 1$; $b = 0$ et $c = 2$.
Vecteur directeur :
$\vec{u}_3(0;1)$; $\vec{u}_3=\vec{j}$.

3.3) Comment chercher un vecteur directeur d'une droite ?

a) On connaît les coordonnées de deux points :

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts de ***d***. Alors le vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de ***d***. Or, on sait que les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont

$$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$$

Théorème 10.

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan et *d* une droite. Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points *distincts* de ***d***, alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite ***d***, dont les coordonnées sont : $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$.

b) On connaît l'équation de la droite :

Théorème 11.

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan et *d* une droite d'équation $ax+by=c$.

Alors $\vec{u}(-b;a)$ et $\vec{u}'(b;-a)$ sont des vecteurs directeurs de la droite ***d.***

Démonstration :

On cherche les coordonnées de deux points distincts $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ de la droite ***d***. On a : $A(x_A, y_A)\in d$ donc $ax_A+by_A=c$ et $B(x_B, y_B)\in d$ donc $ax_B+by_B=c$. On sait alors que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de ***d***.

Montrons que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. On sait que $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$ et $\vec{u}(-b\,;a)$. On calcule la différence des produits en croix :

$$(x_B-x_A)\times a-(-b)\times(y_B-y_A)=a\,x_B-a\,x_A+b\,y_B-b\,y_A$$

$$=\ (a\,x_B+b\,y_B)-(a\,x_A+b\,y_A)\ =\ c-c=0.$$ CQFD.

c) On connaît le coefficient directeur m de la droite :

C'est un cas particulier du théorème précédent. La droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Son équation réduite s'écrit : $y = m\,x + p$ où p est un nombre réel. La forme générale de cette équation est : $-m\,x + y = p$ ou encore $m\,x - y = -p$ avec $a = m$; $b = -1$ et $c = -p$.

D'après le théorème 11, un vecteur directeur de D est donné par :

$$\boxed{\vec{u} = (-b\,;a) = (1\,;m).}$$

3.3) Comment chercher l'équation d'une droite ?

a) On connaît un vecteur directeur et les coordonnées d'un point :

Déterminer l'équation d'une droite D de veceur directeur : $\vec{u}(\alpha,\beta)$ et passant par le point $A(x_A, y_A)$.

Remarques préliminaires :

- Si $\alpha=0\,et\,\beta\neq0$, alors $\vec{u}(0,\beta)$ donc $\vec{u}=\beta\vec{j}$. La droite D est parallèle à l'axe des ordonnées (verticale). Elle passe par A. Donc, son équation est $x=x_A$.
- Si $\alpha\neq0\,et\,\beta=0$, alors $\vec{u}(\alpha,0)$ donc $\vec{u}=\alpha\vec{i}$. La droite D est parallèle àl'axe des abscisses (horizontale). Elle passe par A. Donc, son équation est $y=y_A$.
- Si $\alpha\neq0\,et\,\beta\neq0$, la droite D n'est pas parallèle aux axes. Elle est oblique.

Dans tous les cas, pour trouver l'équation de D, *on raisonne par équivalences successives* :

Soit $M\,(x\,;y)$ un point quelconque du plan. On écrit les coordonnées des vecteurs

$\overrightarrow{AM}\,(x-x_A; y-y_A)$

et $\vec{u}(\alpha;\beta)$

(je les écris exprès l'un en dessous de l'autre pour bien écrire les produits en croix)

On a les équivalences suivantes :

$M\in D$ (ssi) Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

(ssi) $(x-x_A)\beta-(y-y_A)\alpha=0$

(ssi) $\beta x-\alpha\,y=\beta x_A-\alpha\,y_A$

qui est bien une équation de la forme $a\,x+b\,y=c$.

Exemple : *Déterminer l'équation d'une droite D de veceur directeur :* $\vec{u}(-1\,;2)$ *et passant par le point* $A(2\,;5)$.

Le vecteur $\vec{u}$ n'est colinéaire ni à $\vec{i}$ ni à $\vec{j}$. Donc, la droite D n'est pas parallèle aux axes. Elle est oblique. *On raisonne par équivalences successives* :

Soit $M(x\,;y)$ un point quelconque du plan. On écrit d'abord les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}(x-2\,;y-5)$

et $\vec{u}(-1\,;2)$. On a les équivalences suivantes:

$M\in D$ (ssi) Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

(ssi) $(x-2)\times 2-(y-5)\times(-1)=0$

(ssi) $2x-4+y-5=0$

(ssi) $2x+y=9$ (forme générale)

(ssi) $y=-2x+9$ (forme réduite). CQFD.

b) On connaît les coordonnées de deux points :

Déterminer l'équation de la droite (AB) où $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.

On distingue trois cas :

1er cas : Si $x_A=x_B=c$, alors les deux points A et B ont la même abscisse. La droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées (verticale). Son équation est $x=c$.

2ème cas : Si $y_A=y_B=k$, alors les deux points A et B ont la même ordonnée. La droite (AB) est parallèle à l'axe des abscisses (horizontale). Son équation est $y=k$.

3ème cas : Si $x_A\neq x_B$ et $y_A\neq y_B$, la droite (AB) n'est pas parallèle aux axes. Donc, elle es oblique. *On raisonne par équivalences successives* :

Soit $M(x\,;y)$ un point quelconque du plan. On écrit d'abord les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}(x-x_A\,;y-y_A)$

et $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)=(\alpha\,;\beta)$, vecteur directeur de (AB).

(je les écris exprès l'un en dessous de l'autre pour bien voir les produits en croix)

On a les équivalences suivantes

$M\in(AB)$ (ssi) Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

(ssi) $(x-x_A)(y_B-y_A)-(x_B-x_A)(y-y_A)=0$

(ssi) $(y_B-y_A)x-(x_B-x_A)y=(y_B-y_A)x_A-(x_B-x_A)y_A$

(ssi) $\beta x-\alpha y=\beta x_A-\alpha y_A$

qui est bien une équation de la forme $ax+by=c$.

Exemples :

1. *Déterminer l'équation de la droite passant par les points A* (–1; 5) *et B* (–1 ;3)
2. *Déterminer l'équation de la droite passant par les points E* (1; 5) *et F* (–1 ;1)

1°) On remarque d'abord que $x_A = x_B = -1$. Donc A et B ont la même abscisse. La droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées (verticale). Donc, l'équation de (AB) est : $x = -1$.

2°) On remarque d'abord que $x_E \neq x_F$ et $y_E \neq y_F$. Donc, la droite (EF) n'est pas parallèle aux axes. *On raisonne par équivalence successives.* Le vecteur directeur de (EF) est : $\overrightarrow{EF}(x_F - x_E\,;\, y_F - y_E) = (-1-1\,;\, 1-5) = (-2\,;\, -4)$

Soit M (x ; y) un point quelconque du plan. On écrit d'abord les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EM}(x-1\,;\, y-5)$

et $\overrightarrow{EF}(-2\,;\, -4)$, vecteur directeur.

(je les écris exprès l'un en dessous de l'autre pour bien voir les produits en croix)

On a les équivalences suivantes

$$
\begin{aligned}
M \in (EF) \quad & \Leftrightarrow \quad \text{Les vecteurs } \overrightarrow{EM} \text{ et } \overrightarrow{EF} \text{ sont colinéaires} \\
& \Leftrightarrow \quad (x-1)\times(-4) - (-2)\times(y-5) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad -4x + 4 + 2y - 10 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad -4x + 2y = 6 \quad \text{(forme générale)} \\
& \Leftrightarrow \quad 2x - y = -3 \quad \text{(autre forme générale ; on divise par –2)} \\
& \Leftrightarrow \quad y = 2x + 3 \quad \text{(forme réduite).} \qquad \text{CQFD.}
\end{aligned}
$$