Chapitre 1

Le second degré

Ce que dit le programme

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Second degré Forme canonique d'une fonction polynôme de degré deux. Équation du second degré, discriminant. Signe du trinôme.	Déterminer et utiliser la forme la plus adéquate d'une fonction polynôme de degré deux en vue de la résolution d'un problème : Forme développée, factorisée ou canonique.	On fait le lien avec les représentations graphiques étudiées en classe de seconde. Des activités algorithmiques doivent être réalisées dans ce cadre.

1. Fonctions polynômes : Définition. Monôme. Coefficient. Degré. Polynôme. Degré. Egalité de deux polynômes. Racine d'un polynôme.
2. Trinôme du second degré. Egalité de deux trinômes du second degré. Th.1. Différentes écritures réduites : développée, factorisée et canonique.
3. Forme canonique d'un trinôme $P(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ Th.2.
4. Résolution de l'équation $ax^2+bx+c = 0$. Définition du discriminant Delta. Th.3. Cas particuliers
5. Somme et produit des racines ($\Delta \geqslant 0$) Th.4.
6. Factorisation du trinôme $P(x) = ax^2+bx+c$. Th.5.
7. Signe du trinôme $P(x) = ax^2+bx+c$. Th.6.
8. Représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré. Th.7.
9. Tableau récapitulatif des résultats

1. Introduction : Fonctions polynômes

1.1) Définitions

On appelle fonction monôme de degré n, toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre réel x associe le terme $P(x) = a\,x^n$. Le nombre a, non nul, s'appelle le coefficient et n le degré du monôme P.

Si $a = 0$, la fonction P définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout réel x associe le terme $P(x) = 0$ s'appelle le monôme nul (ou polynôme nul). Le polynôme nul n'a pas de degré !

Si $a \neq 0$ et $n = 0$, la fonction P définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout réel x associe le terme constant $P(x) = ax^0 = a$, s'appelle un monôme constant (ou polynôme constant). Ainsi, Une constante est un « polynôme » de degré 0.

On appelle fonction polynôme de degré n, toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$, qui s'écrit comme somme de plusieurs monômes. Si on écrit sous la *forme développée réduite* et les monômes rangés *suivant les puissances décroissantes*, P(x) peut s'écrire sous la forme :

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$$

où le réel a_n est non nul, et a_0 , a_1 , ..., a_{n-1} sont des nombres réels quelconques, s'appellent les coefficients du polynôme P et n est le degré du polynôme.

Remarque :

L'écriture $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ peut donc être lue ou interprétée de deux manière:

- comme une « *expression algébrique* » de variable x ;
- ou comme une « *fonction polynôme* », de la variable réelle x.

1.2) Égalité de deux polynômes

Propriété :

Deux fonctions polynômes sont égales si et seulement si, elles ont le même degré et si les coefficients des termes de même degré sont égaux.

Exemple : Trouver trois nombres réels a, b et c pour que les deux polynômes suivant P et Q soient égaux : $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $Q(x) = (2x-1)(x+3)$.

P(x) étant déjà réduit, il suffit de développer et réduire Q(x), puis identifier les deux polynômes. En effet : Q(x) $Q(x) = 2x^2 + 5x - 3$. P et Q sont de degré 2 et par identification : a = 2 , b = 5 et c = –3.

1.3) Racine d'un polynôme

Définition : On appelle *racine* ou *zéro* d'un polynôme P toute valeur de la variable x, *solution* de l'équation $P(x) = 0$.

Exemple: 2 est une racine du polynôme de degré 1: $P(x) = 2x - 4$. En effet P(2) = 0.

2. Polynôme du second degré

2.1) Définition

On appelle fonction polynôme du second degré, toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre réel x associe le nombre P(x) qui peut s'écrire sous la forme développée réduite :

$$P(x) = ax^2 + bx + c \text{ , où a, b et c sont des réels et } a \neq 0$$

L'expression algébrique associée $ax^2 + bx + c$ s'appelle un trinôme du second degré.

Exemples :

A = $2x^2 - 5x + 7$ (a = 2, b = –5 et c = 7) ;

B = $(x-1)(2x+3)$ [à développer et réduire] (a = 2, b=1 et c = –3) et

C = $3x^2 - 1$ (a = 3, b = 0 et c = –1) sont des trinômes du secon degré.

1.2) Égalité de deux trinômes

Propriété :

> Deux fonctions polynômes du second degré sont égales si et seulement si, les coefficients de leurs termes de même degré sont égaux.

Autrement dit : Si $P(x)=ax^2+bx+c$ et $Q(x)=a'x^2+b'x+c'$, alors

[P = Q] ssi [pour tout $x\in\mathbb{R}$ P(x) = Q(x)] ssi [$a=a'$, $b=b'$ et $c=c'$]

1.2) Racine d'un trinôme

Définition : On appelle ***racine*** ou ***zéro*** d'un trinôme P toute valeur de la variable *x*, ***solution*** de l'équation $P(x)=0$ **.**

Exemple : 1 est une racine du trinôme du secon degré : $P(x)=2x^2-4x+2$.

En effet P(1) = 0.

3. Forme canonique d'un trinôme

Nous connaissons déjà trois formes d'écritures réduites d'une expression algébrique (ou trinôme) du second degré. Par exemple :

$P(x)=2x^2-4x-6$ forme développée réduite ; $P(x)=2(x+1)(x-3)$ forme factorisée (réduite) et $P(x)=2(x-1)^2-8$ qu'on appelle la forme canonique.

Suivant le problème posé, nous sommes amenés à utiliser l'une ou l'autre de ces formes, Le passage de l'une à l'autre est plus ou moins facile.

Théorème n°1 et définition

> Tout trinôme du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$ (avec $a\neq 0$) s'écrit d'une manière unique sous la forme $P(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=\frac{-b}{2a}$.
>
> Cette forme s'appelle ***la forme canonique*** du trinôme P(*x*).

Démonstration :

Comme $a\neq 0$, on met *a* en facteur pour commencer la transformation de l'écriture de P(*x*) :

$$P(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \quad ,$$

qu'on peut encore écrire :

$$P(x)=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x\right)+c$$

On reconnaît le début d'une identité remarquable (I.R. n°1), donc

$$P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$

On réduit au même dénominateur,

$$P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}$$

On pose $\alpha=\frac{-b}{2a}$ et $\beta=\frac{-b^2+4ac}{4a}$. On obtient ainsi la forme canonique :

$P(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$. CQFD

Exemple : Trouver la forme canonique du polynôme : $P(x)=2x^2-4x-6$

On suit la même procédure :

$$P(x)=2(x^2-2x)-6$$

$$P(x)=2\left[(x-1)^2-1\right]-6$$

$$P(x)=2(x-1)^2-2-6$$

$$P(x)=2(x-1)^2-8$$

D'où la forme canonique de P(x).

4. Résolution de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$

Les trois nombres réels a, b et c, $a\neq 0$ étant données, résoudre $ax^2+bx+c=0$ revient à déterminer, s'il en existe, tous les nombres réels pour lesquels cette égalité est vraie.

Une ***solution*** de l'équation P(x) = 0 est aussi une ***racine*** du polynôme P(x).

Théorème n°2 :

Pour résoudre l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ (avec $a\neq 0$), on pose $\Delta=b^2-4ac$, et on distingue trois cas :

1^er^ cas : $\Delta<0$. l'équation n'admet pas de solution réelle ;

2^ème^ cas : $\Delta=0$. l'équation admet une seule solution réelle : $x_0=\frac{-b}{2a}$.

On dit que x_0 est ***une solution double*** ;

3^ème^ cas : $\Delta>0$. l'équation admet deux solutions réelles :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta=b^2-4ac$ s'appelle le ***discriminant*** du trinôme du second degré.

Démonstration :

Étant donné que $a \neq 0$, d'après ce qui précède, on sait que : résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ revient à résoudre l'équation :

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$$

On pose alors : **$\Delta = b^2 - 4ac$**. Ce qui permet de simplifier. On obtient :

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=0$$

Comme $a \neq 0$, on peut mettre *a* en facteur dans toute l'expression. Ce qui donne :

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0$$

Et puisque $a \neq 0$, on obtient : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$ (*)

1er cas : $\Delta < 0$.

L'équation (*) s'écrit : $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

Dans cette dernière égalité, le membre de gauche est positif ou nul, alors que le membre de droite est strictement négatif ! Ce qui est impossible. L'équation n'admet pas de solution réelle.

2ème cas : $\Delta = 0$.

L'équation (*) s'écrit : $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

Donc $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0$$

D'après le théorème du produit nul (Th.P.N), cette équation admet une solution réelle $x_0=\frac{-b}{2a}$ comptée deux fois. C'est une solution réelle double.

3ème cas : $\Delta > 0$.

Grâce à l'identité remarquable I.R.n°3, on peut factoriser l'équation (*) comme suit :

$$\left[\left(x+\frac{b}{2\mathrm{a}}\right)-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2\mathrm{a}}\right)+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}}\right]=0$$

Ce qui donne :

$$\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

D'après le théorème du produit nul (Th.P.N), cette équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad .$$

CQFD

Remarque : Lorsqu'on remplace Δ par 0 dans ces dernières égalités, on trouve :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{0}}{2a}=x_0 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{0}}{2a}=x_0$$

Ainsi, les formules obtenues pour $\Delta > 0$ se généralisent à $\Delta\geqslant 0$.

5. Somme et produit des racines (si Δ ≥ 0)

Théorème 3 :

Si le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines réelles (distinctes ou confondues, $\Delta \geq 0$), alors : la somme des racines $S = x_1 + x_2$ et leur produit $P = x_1x_2$ sont donnés par :

$$S=-\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P=\frac{c}{a}$$

Démonstration :

Supposons que $\Delta\geqslant 0$. Donc $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Donc

$S=x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$ et avec l'I.R.n°3, on obtient :

$$P=x_1\times x_2=\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

Application : Déterminer tous les nombres réels, s'il en existe, dont la somme est égale à 5 et le produit à – 14.

Cela revient à résoudre le système de deux équations à deux inconnues x et y :

$$\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} y=S-x \\ x(S-x)=P \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} y=S-x \\ Sx-x^2=P \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} y=S-x \\ x^2-Sx+P=0 \end{cases}$$

On peut retrouver le même résultat en mettant a en facteur dans le trinôme du second degré $(a \neq 0)$:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2-Sx+P\right)$$

Théorème 4.

Si x_1 et x_2 sont deux nombres réels dont la somme est S et le produit est P. Alors x_1 et x_2 sont les deux solutions de l'équation du second degré $\boldsymbol{x^2 - Sx + P = 0}$.

Exemple : S = 5 et P = –14.

On résout l'équation $x^2 - 5x - 14 = 0$. $\Delta=(-5)^2-4\times1\times(-14)=81$.

$\Delta > 0$. Donc cette équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = -2$ et $x_2 = 7$.

Comme x_1 et x_2 jouent des rôles symétriques, nous obtenons donc deux couples solutions du système : si $x = -2$ alors $y = 7$ et si $x = 7$ alors $y = -2$.

Conclusion : S = { (–2 ; 7) ; (7 ; –2)}.

6. Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Théorème 5.

On considère un trinôme du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$ (avec $a \neq 0$) et Δ son discriminant, alors pour factoriser ce trinôme, on distingue trois cas :

1er cas : $\Delta < 0$. Le trinôme n'est pas factorisable (sauf par une constante) ;

2ème cas : $\Delta = 0$. Le trinôme se factorise : $P(x)=a(x-x_0)^2=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$;

3ème cas : $\Delta > 0$. Le trinôme se factorise : $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$;

où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme du second degré P.

Démonstration : Immédiate, d'après ce qui précède.

7. Signe du trinôme

Pour étudier le signe du trinôme du second degré, nous allons factoriser P(x), donc distinguer les cas suivant le signe de Δ.

1er cas : Δ > 0. Nous avons vu que $P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{(-\Delta)}{4a^2}\right]$

Le premier terme entre crochets est positif ou nul, le deuxième est strictement positif. Donc la somme entre crochets est strictement positive.Par conséquent, P(x) garde un signe constant, le signe de a, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2ème cas : Δ = 0. Nous avons vu que $P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

Le trinôme admet une racine double ; comme le carré est toujours positif ou nul, P(x) est toujours du signe de a, pour $x\neq x_0$.

3ème cas : Δ > 0. Nous avons vu que $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

Le trinôme admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 et, pour fixer les idées, supposons que $x_1 < x_2$. Faisons un tableau de signes :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
a	signe de a		signe de a		signe de a
$(x- x_1)$	–	0	+		+
$(x- x_1)$	–		–	0	+
$(x- x_1)(x- x_1)$	+	0	–	0	+
$P(x)$	signe de a		signe de $(-a)$		signe de a

Théorème 6.

Un trinôme du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$ (avec $a\neq 0$) est toujours du signe de a, à l'extérieur des racines (lorsqu'elles existent). En particulier si Δ < 0, le trinôme garde un signe constant, le signe de a, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Démonstration : Immédiate, d'après ce qui précède.

8. Application à la résolution d'inéquations du second degré

Pour résoudre une inéquation du second degré, on cherche le signe du trinôme du second degré associé.

Exemple: Résoudre l'inéquation $-2x^2+3x+5\geqslant 0$.

On commence par calculer le discriminant : $\Delta=3^2-4\times(-2)\times 5=9+40=49>0$.
Le trinôme admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = -1$ et $x_2 = 5/2$. Dans notre cas : $a = -2$ est négatif.

Or, on sait qu'un trinôme du second degré est toujours du signe de a, à l'extérieur des racines. Donc, il est positif entre les racines. Par conséquent,

$-2x^2+3x+5\geqslant 0$ si et seulement si $-1\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}$.

Conclusion : L'ensemble des solutions de cette inéquation est $S=\left[-1\,;\frac{5}{2}\right]$.

Remarque : Bien sûr, on aurait pu, avec la même technique, chercher les racines du trinôme et fait un tableau de signes, comme en classe de seconde.

8. Représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré

Définition : La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré s'appelle ***une parabole***.

Théorème 7.

Soit P une fonction polynôme du second degré définie par : $P(x)=ax^2+bx+c$ (avec $a\neq 0$). Alors la représentation graphique de P dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ possède les propriétés suivantes :

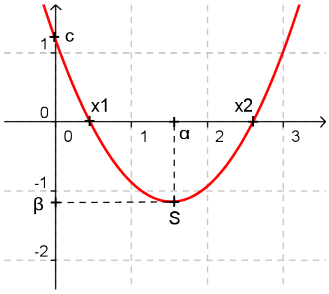
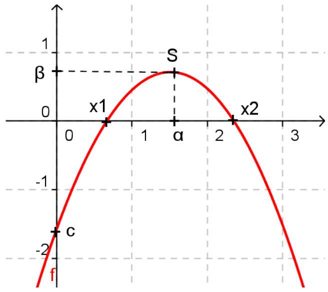
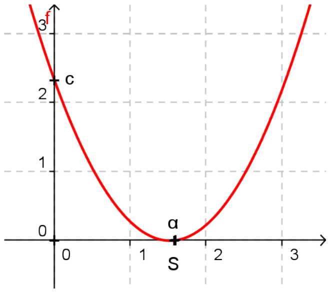
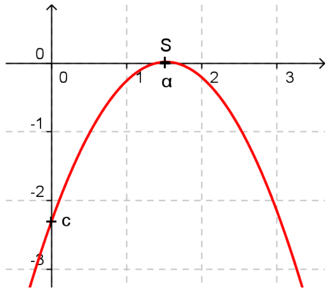
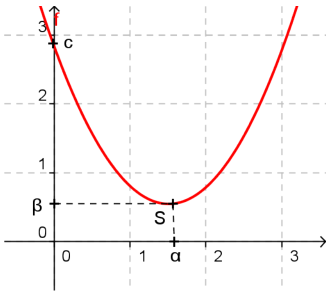
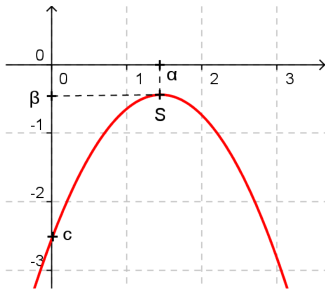
- Le ***sommet*** *S* de la parabole a pour coordonnées : S(α ; β)

  où $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=P(\alpha)=P\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$;
- La parabole tourne sa ***cavité*** vers le haut si $a > 0$, et vers le bas si $a < 0$;
- La droite verticale d'équation : $x=-\frac{b}{2a}$ est un ***axe de symétrie*** de la parabole ;
- La parabole coupe l'axe des abscisses aux points ayant pour abscisses les racines du trinôme (lorsqu'elles existent) ;
- La parabole coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées : (0 ; c) qu'on pourrait appeler « l'ordonnée à l'origine ».

Démonstration : Voir Devoir maison.

9. Tableau récapitulatif des résultats

On considère un trinôme du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$ (avec $a\neq 0$) et Δ son discriminant. Alors, nous pouvons résumer les résultats précédents de la manière suivante :

Signe de **Δ**	Racines & Factorisation	***a* > 0** (vers le haut)	***a* < 0** (vers le bas)
Δ > 0	Deux racines réelles $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ Signe de $P(x)$ →	 $+$ x_1 $-$ x_2 $+$	 $-$ x_1 $+$ x_2 $-$
Δ = 0	Une racine réelle double $P(x)=a(x-x_0)^2$ Signe de $P(x)$ →	 $+$ x_0 $+$	 $-$ x_0 $-$
Δ < 0	Pas de racine réelle. Pas de factorisation. Signe de $P(x)$ →	 $P(x)>0$ pour tout x	 $P(x)<0$ pour tout x