Les différentes formes d'un trinome du second degré

Activité. [RÉSOLUE]

On considère la fonction trinôme du secod degré, définie par : $f(x)=2x^2-4x-6$

$f(x)$ est écrite sous la forme développée réduite (FDR)

1°) **A partir de l'expression développée réduite** de $f(x)$, déterminer la forme canonique (FC) puis la forme factorisée (FF) de $f(x)$.

2°) **En utilisant les théorèmes du cours**, déterminer la forme canonique (FC) puis la forme factorisée (FF) de $f(x)$.

3°) **Choisir la forme la plus adaptée** à chacune des questions suivantes et y répondre :

a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

b) Résoudre l'équation $f(x) = -6$.

c) Résoudre l'équation $f(x) = -8$.

d) Résoudre l'équation $f(x) = -2$.

Corrigé

1°) Forme canonique (FC) et forme factorisée (FF) de $f(x)$.

Nous savons qu'un trinôme du second degré *peut* s'écrire sous trois « formes classiques » : la forme développée réduite (FDR), la forme canonique (FC) et – si possible – la forme factorisée (FF) de $f(x)$.

Avec uniquement le calcul algébrique, le passage de l'une à l'autre de ces formes n'est pas si rapide. Cependant, on peut suivre le schéma suivant :

1ère étape : (FDR) → (FC) ?

$f(x)=2x^2-4x-6$ est bien la forme développée réduite (FDR) de $f(x)$.
On a donc $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a=2, b=-4$ et $c=-6$.
On isole les deux termes en x puis on met le $a=2$ en facteur :

$$f(x)=[2x^2-4x]-6=2[x^2-2x]-6$$

puis, on écrit l'expression entre crochets comme le début d'une identité remarquable (IR n°2) :

$$f(x)=2[x^2-2\times1\times x]-6$$

On complète l'IR n°2 entre crochets, mais on doit soustraire ce qu'on a rajouté :

$$f(x)=2[x^2-2x+1^2-1^2]-6$$

Dans les crochets, on voit bien les trois termes de l'IRn°2. Ce qui donne :

$$f(x)=2[(x-1)^2-1]-6$$

On développe pour supprimer les crochets :

$$f(x)=2(x-1)^2-2-6$$

On réduit les deux derniers termes et on obtient :

$$f(x)=2(x-1)^2-8 \quad \text{(FC)}$$

2ème étape : (FC) → (FF) ?

On repart de la (FF) de $f(x)$ et on remet le $a=2$ en facteur dans toute l'expression. C'est un début de factorisation. On obtient :

$$f(x)=2[(x-1)^2-4]$$

On reconnaît une IRn°3 entre les crochets :

$$f(x)=2[(x-1)^2-2^2]$$

qu'on peut factoriser. On obtient :

$$f(x)=2(x-1-2)(x-1+2)$$

Ce qui donne :

$$f(x)=2(x-3)(x+1) \quad \text{(FF)}$$

3ème étape : (FC) ou (FF) → (FDR) trop facile ! Classe de 4ème et 3ème.

(FF)
$$f(x)=2(x-3)(x+1)$$
$$f(x)=2(x^2+x-3x-3)$$
$$f(x)=2(x^2-2x-3)$$
$$f(x)=2x^2-4x-6 \quad \text{(FDR)}$$

(FC)
$$f(x)=2(x-1)^2-8$$
$$f(x)=2(x^2-2x+1)-8$$
$$f(x)=2x^2-4x+2-8$$
$$f(x)=2x^2-4x-6 \quad \text{(FDR)}$$

2°) Si on part des théorèmes du cours :

1ère étape : (FDR) → (FC) ?

La forme développée réduite de $f(x)$ est : $f(x)=2x^2-4x-6$.
On a donc $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a=2, b=-4$ et $c=-6$.

La forme canonique de $f(x)$ est : $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$.

Donc, pour obtenir la forme canonique, on pose d'une part, $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{(-4)}{2\times 2}$

donc $\alpha=1$; et d'autre part, on calcule $\beta=f(\alpha)=f(1)=-8$.

Conclusion : La forme canonique de $f(x)$ est :

$$f(x)=2(x-1)^2-8 \quad \text{(FC)}$$

Remarque : On sait que (α, β) sont les *coordonnées du sommet S de la parabole*, représentation graphique C_f de la fonction *f*. Donc S (1 ; – 8).

2ère étape : (FC) → (FF). Même technique que dans le 1°).

3°) Choisir la forme la plus adaptée pour résoudre un problème.

Voici les trois formes d'écriture du trinôme du secon degré :
La forme développée réduite : $f(x)=2x^2-4x-6$ (FDR)
La forme canonique $f(x)=2(x-1)^2-8$ (FC)
La forme factorisée $f(x)=2(x-3)(x+1)$ (FF)

a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
Bien évidemment, la forme la plus adaptée est la forme factorisée, puisqu'elle nous permet d'utiliser le *théorème du produit nul*.

> Rappel : Théorème du produit nul (Th.P.N.)
> *Dans l'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$ *:*
> *Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.*
> *Autrement dit : pour tous nombres réels a et b, on a :* [$ab = 0$] ssi [$a = 0$ *ou* $b = 0$].

En effet : $f(x) = 0$ (ssi) $2(x-3)(x+1)=0$
(ssi) $2 = 0$ ou $x-3=0$ ou $x+1=0$
(ssi) $x-3=0$ ou $x+1=0$, car $2\neq 0$.
(ssi) $x=3$ ou $x=-1$
Conclusion : Cette équation admet deux solutions et $S=\{-1;3\}$.

3°b) Résoudre l'équation $f(x) = -6$.
Ici, la forme la plus adaptée est la forme développée réduite, puisque le « – 6 » est le terme constant de cette forme. Ce qui donne :

$f(x) = -6$ (ssi) $2x^2-4x-6=-6$ (le – 6 va s'éliminer !!)
(ssi) $2x^2-4x=0$ puis je factorise par $2x$, comme en Seconde
(ssi) $2x(x-2)=0$ et d'après le Th.P.N. On obtient :
(ssi) $2x=0$ ou $x-2=0$
(ssi) $x=0$ ou $x=2$.
Conclusion : Cette équation admet deux solutions et $S=\{0;2\}$.

3°c) Résoudre l'équation $f(x) = -8$.
Ici, la forme la plus adaptée est la forme canonique, puisque le « – 8 » est le terme constant de cette forme. Ce qui donne :

$f(x) = -8$ (ssi) $2(x-1)^2-8=-8$ (le – 8 va s'éliminer !!)
(ssi) $2(x-1)^2=0$ et d'après le Th.P.N., on obtient :
(ssi) $2=0$ ou $x-1=0$. Comme $2\neq 0$, on obtient
(ssi) $x=1$
Conclusion : Cette équation admet une seule solution et $S=\{1\}$.

3°d) Résoudre l'équation $f(x) = -2$. (*Compliquons un peu !!*)

Ici, ni la forme développée réduite, ni la forme factorisée ne conviennent. Nous allons essayer avec la forme canonique.

$f(x) = -2$ (ssi) $2(x-1)^2-8=-2$

(ssi) $2(x-1)^2-6=0$

Pour retrouver une IRn°3, on doit factoriser par 2. Ce qui donne :

$f(x) = -2$ (ssi) $2\left[(x-1)^2-3\right]=0$

Or, 3 peut s'écrire comme un carré. On a : $3=\left(\sqrt{3}\right)^2$. Ce qui donne :

$f(x) = -2$ (ssi) $2\left[(x-1)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right]=0$; et on reconnaît une IRn°3.

(ssi) $2\left(x-1-\sqrt{3}\right)\left(x-1+\sqrt{3}\right)=0$; et d'après le Th.P.N., on a :

(ssi) $2=0$ ou $x-1-\sqrt{3}=0$ ou $x-1+\sqrt{3}=0$. Comme $2\neq 0$,

(ssi) $x=1+\sqrt{3}$ ou $x=1-\sqrt{3}$

Conclusion : Cette équation admet deux solutions et $S=\left\{1-\sqrt{3}\,;1+\sqrt{3}\right\}$.

Conclusion générale :

Rassurez-vous, nous allons introduire une nouvelle méthode – la notion de *discriminant* – pour simplifier les calculs.