Le second degré

Exercice n°1 (Extrait ***adapté*** d'un exercice du Bac STMG *Polynésie*, juin 2009).

Cet exercice comporte une annexe à rendre avec la copie (à réaliser vous-même) !

Un artisan fabrique des objets. Il ne peut pas en produire plus de 70 par semaine. On suppose que tout objet fabriqué est vendu.

Le coût de production de x dizaines d'objets, en milliers d'euros, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle [0; 7]. Sa courbe représentative est donnée ci-dessous.

1°a) Par lecture graphique, donner le coût de production de 50 objets.

b) Vérifier votre résultat par le calcul.

c) Par lecture graphique, donner le nombre d'objets produits pour un coût de 3000 euros.

2°) Chaque objet est vendu 80 euros. On note $g(x)$ la recette obtenue pour la vente de x dizaines d'objets, en milliers d'euros.

a) Justifier que $g(x)=0{,}8x$.

b) Tracer dans le repère de l'annexe la droite D d'équation $y=0{,}8x$.

c) Par lecture graphique, déterminer à quel intervalle doit appartenir x pour que l'artisan réalise un bénéfice.

3°) On admet que la fonction f est définie, pour x appartenant à l'intervalle [0; 7], par $f(x)=0{,}1x^2+0{,}2x+0{,}5$.

Le bénéfice réalisé par la production et la vente de x dizaines d'objets en milliers d'euros, est modélisé par une fonction B définie sur l'intervalle [0; 7].

a) Montrer que pour tout $x \in [0; 7]$: $B(x)=-0{,}1x^2+0{,}6x-0{,}5$.

b) Résoudre l'équation $B(x) = 0$.

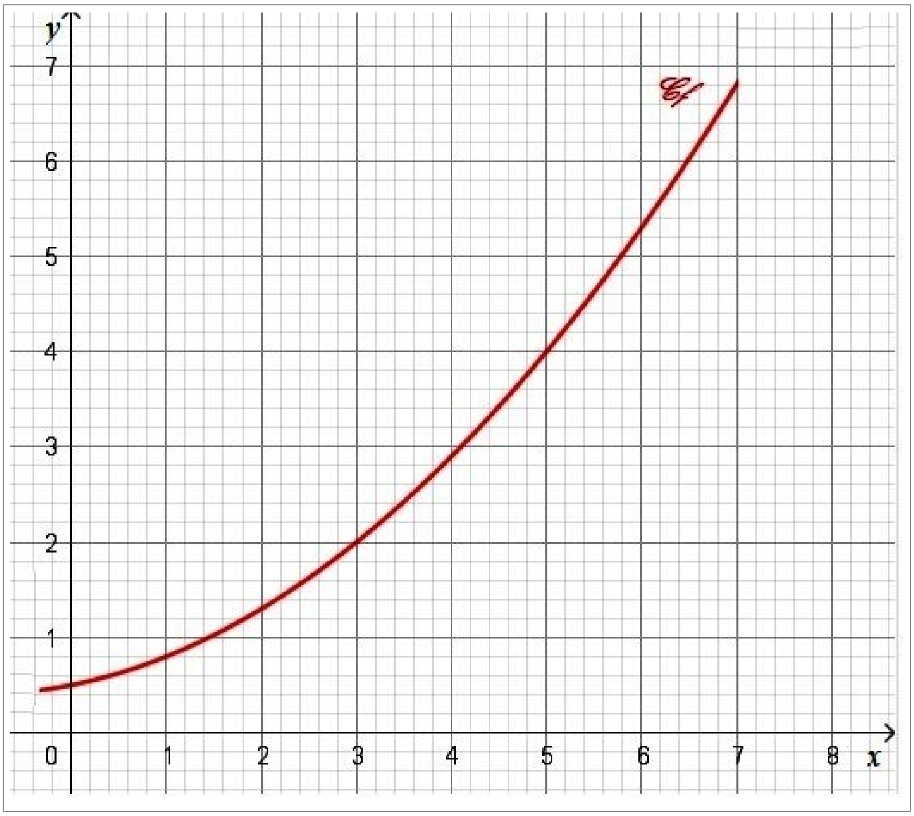
c) Déterminer le signe de $B(x)$ pour tout $x \in [0; 7]$.

d) Vérifier que pour tout $x \in [0; 7]$: $B(x)=-0{,}1(x-3)^2+0{,}4$.

e) Quel nombre d'objets l'artisan doit fabriquer et vendre pour réaliser un bénéfice maximal ? Donner la valeur de ce bénéfice maximal.

Vous pouvez réaliser vous-même sur ***Geogebra classique v.5*** la courbe C_f de la fonction f. La version 5 de Geogebra peut être téléchargée et installée contrairement à la version 6.]

Cette page est à imprimer pour faire l'exercice



Corrigé de l'exercice n°1

1°a) Par lecture graphique, donner le coût de production de 50 objets.

D'après l'énoncé, x désigne le nombre de dizaines d'objets. Donc 50 objets correspondent à $x = 5$. Et par lecture graphique, $f(5) = 4$. Or $f(x)$ est exprimé en milliers d'euros. Donc, le coût de production de 50 objets est égal à **4 000 euros.**

b) Vérification du résultat par le calcul.

$$f(5)=0{,}1\times 5^2+0{,}2\times 5+0{,}5=2{,}5+1+0{,}5=4.$$

On a bien : $f(5) = 4$.

c) Par lecture graphique, donner le nombre d'objets produits pour un coût de 3000 euros.

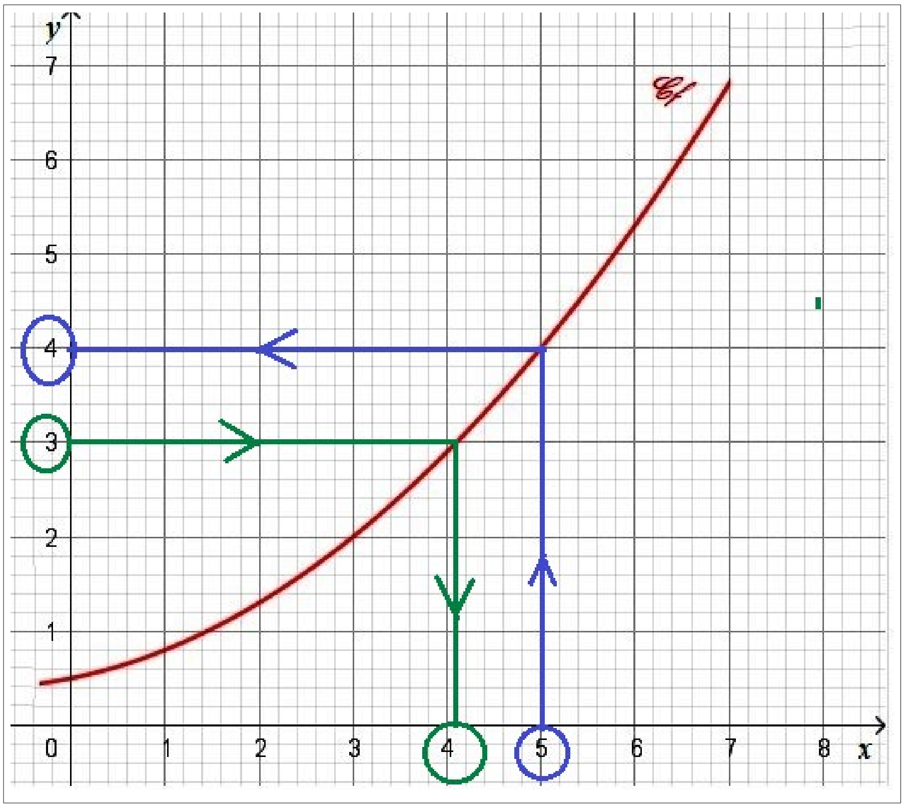
3000 euros correspondent à y = 3. On trace la droite horizontale passant par y = 3, elle coupe la courbe au point d'abscisse $x = 4{,}1$ environ. Pour trouver le nombre d'objets, on multiplie par 10.

Conclusion. Pour obtenir un coût de 3000 euros, il faut produire environ 41 objets.

Vérification : $f(4{,}1)=0{,}1\times(4{,}1)^2+0{,}2\times 4{,}1+0{,}5=3{,}001$.

En multipliant par 1000, on obtient un coût de 3001 €. D'où le résultat.

Illustration de la Question 1° a) et c).



2°a) Chaque objet est vendu 80 euros. On note $g(x)$ la recette obtenue pour la vente de x dizaines d'objets, en milliers d'euros. Montrons que : $g(x)=0{,}8\,x$.

En effet : Chaque objet est vendu 80 €. Or x désigne le nombre de dizaines d'objets.

On a alors la correspondance :

$x = 1$ correspond à 10 objet est vendu $80\times 10=800\,€ \;=\; 0{,}8$ milliers d'euros

Et pour tout $x \in [0;\, 7]$, x correspond à $10x$ objets (on multiplie par 10) donc sont vendus $80\times 10\,x=800\,x \;=\; 0{,}8\,x$ milliers d'euros.

Conclusion. Le prix de vente de x dizaines d'objets, exprimé en milliers d'euros. Est bien égal à : $g(x)=0{,}8\,x$.

Remarque. En général les mille expriment des Kilos. Donc, on dira **1K€ = 1000 €**.

1K€ se dit un kiloeuro.

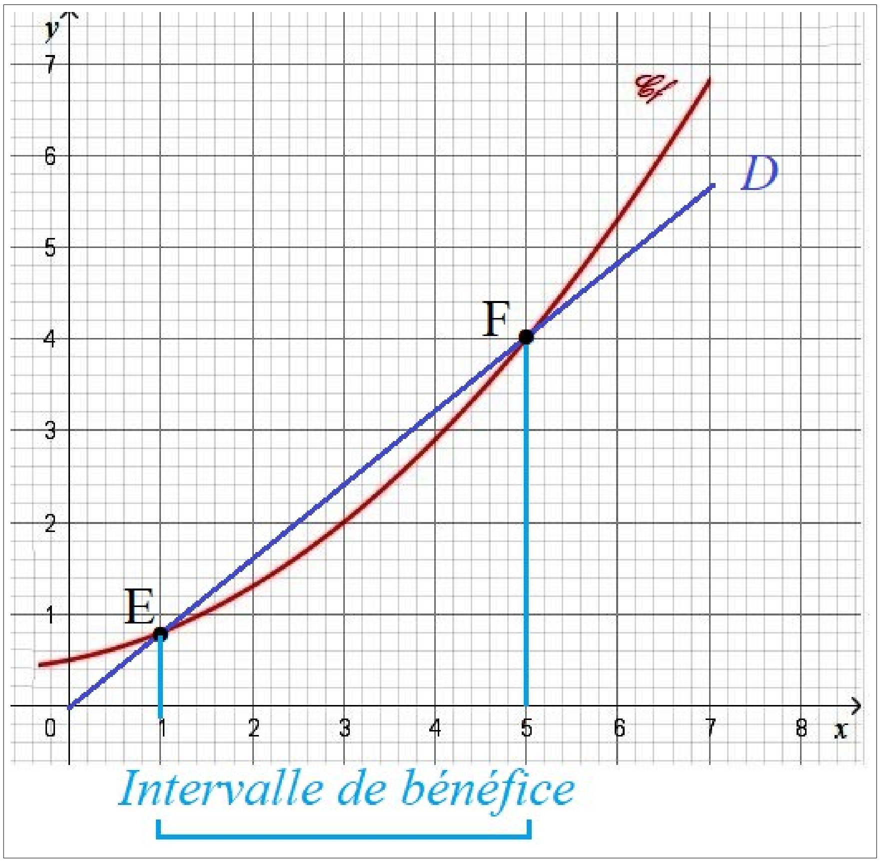
b) Tracer dans le repère de l'annexe la droite D d'équation $y=0{,}8\,x$.

Pour tracer une droite, il suffit de connaître les coordonnées de deux points.

Or pour $x = 0$, $g(0)=0{,}8\times 0=0$. Donc, $O(0{,}0)\in D$.

De même, pour $x = 5$, $g(5)=0{,}8\times 0=4$. Donc, $F(5{,}4)\in D$

On place les deux points sur le graphique, puis on construit la droite D passant par O et E. On obtient la construction suivante :



c) Par lecture graphique, déterminer l'intervalle des bénéfices.

L'entreprise réalise des bénéfices lorsque la recette est supérieure au coût de fabrication, donc lorsque la droite *D* (correspondant aux recettes) est située au-dessus de la courbe Cf correspondant au coût de fabrication.

Donc, par lecture graphique, l'entreprise réalise des bénéfices sur l'intervalle]1 ; 5[.

Remarque. J'ai prix un intervalle ouvert, les bornes sont exclues, car elle correspondent à « un bénéfice nul ». On les appelle « les points morts » (la recette est égale au coût de fabrication.

3°) **Analyse théorique.**

On admet que la fonction f est définie, pour tout $x \in [0; 7]$, par

$$f(x)=0{,}1x^2+0{,}2x+0{,}5\,.$$

Le bénéfice réalisé par la production et la vente de x dizaines d'objets en milliers d'euros, est modélisé par une fonction B définie sur l'intervalle [0; 7].

a) Montrons que pour tout $x \in [0; 7]$: $B(x)=-0{,}1x^2+0{,}6x-0{,}5\,.$

En effet : On sait que la formule le bénéfice est donné par :

Bénéfice = Recette – Coût de fabrication

Donc, pour tout $x \in [0; 7]$: $B(x)=g(x)-f(x)$

Donc : $B(x)=0,8x-(0,1x^2+0,2x+0,5)$

Donc : $B(x)=0,8x-0,1x^2-0,2x-0,5$

Ce qui donne : $\boxed{B(x)=-0,1x^2+0,6x-0,5.}$

b) Résolution de l'équation $B(x) = 0$.

Ce qui correspond à : $-0,1x^2+0,6x-0,5=0$

avec : $a=-0,1$; $b=0,6$ et $c=-0,5$.

Je calcule le discriminant : $\Delta=b^2-4ac$.

$$\Delta=(0,6)^2-4\times(-0,1)\times(-0,5)$$

Donc : $\boxed{\Delta=0,16.}$

$\Delta>0$, donc l'équation $B(x)=0$ admet deux solutions distinctes.

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-0,6+\sqrt{0,16}}{2\times(-0,1)} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-0,6-\sqrt{0,16}}{2\times(-0,1)}$$

$$x_1=\frac{-0,6+0,4}{-0,2} \quad \text{et} \quad x_1=\frac{-0,6-0,4}{-0,2}$$

Ce qui donne après simplification : $x_1=1$ et $x_2=5$.

Conclusion. L'équation $B(x)=0$ admet deux solutions distinctes : $\boxed{x_1=1}$ et $\boxed{x_2=5.}$ Donc, l'ensemble des solutions de cette équation est : $\boxed{S=\{1\ ;5\}.}$

c) Déterminer le signe de $B(x)$ pour tout $x \in [0; 7]$.

$B(x)$ est un trinôme du second degré avec $a=-0,1$; donc $a < 0$.

Or on sait qu'un trinôme du second degré est du signe de « a » à l'extérieur des racines et du signe opposé entre les racines.

(On aurait pu dire aussi que : « $a < 0$, donc les branches de la parabole sont dirigées vers le bas. Donc, $B(x)<0$ à l'extérieur des racines .... »)

Ce qui donne :

pour tout $x \in [0 ; 1[$ ou $x \in]5 ; 7]$: $B(x) < 0$ et pour tout $x \in]1 ; 5[$: $B(x) > 0$

On pourrait également résumer le signe de $B(x)$ dans un tableau de signes :

x	0		1		5		7
$B(x)$		–	0	+	0	–	

C'est mieux présenté et beaucoup plus lisible dans un tableau !!

d) Forme canonique de $B(x)$

Pour tout $x \in [0; 7]$, on a :

$$\begin{aligned} -0,1(x-3)^2+0,4 &= -0,1\left(x^2-2\times x\times 3+3^2\right)+0,4 \\ &= -0,1x^2+0,6x-0,9+0,4 \\ &= -0,1x^2+0,6x-0,5 \\ &= B(x) \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \in [0; 7]$, on a : $\boxed{B(x)=-0,1(x-3)^2+0,4}$

e) Quel nombre d'objets l'artisan doit fabriquer et vendre pour réaliser un bénéfice maximal ? Donner la valeur de ce bénéfice maximal.

D'après la forme canonique : $\boxed{\alpha=\dfrac{-b}{2a}=3.}$ et $\boxed{\beta=B(\alpha)=0,4.}$

On sait que ***a* < 0** ; donc la fonction B est strictement croissante sur $[1 ; \alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha ; 7]$. Elle admet un maximum égal à β qui est atteint en $x=\alpha$.

Par conséquent, l'entreprise admet un bénéfice maximal égal à $0,4\times 1000$ = **400 €**, qui est atteint pour $x=\alpha=3$; ce qui correspond à la production de **30 objets**.

OUF !