Dérivation – Calcul des dérivées des fonctions usuelles

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Dérivation Nombre dérivé d'une fonction en un point. Tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable en un point.	Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé.	Le nombre dérivé est défini comme limite du taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0. On ne donne pas de définition formelle de la limite. L'utilisation des outils logiciels facilite l'introduction du nombre dérivé.
Fonction dérivée. Dérivée des fonctions usuelles $\sqrt{x}$ $\frac{1}{x}$ et x^n (n entier naturel non nul). Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient.	Calculer la dérivée de fonctions.	On évite tout excès de technicité dans les calculs de dérivation. Si nécessaire, dans le cadre de la résolution de problèmes, le calcul de la dérivée d'une fonction est facilité par l'utilisation d'un logiciel de calcul formel. Il est intéressant de présenter le principe de démonstration de la dérivation d'un produit.
Lien entre signe de la dérivée et sens de variation. Extremum d'une fonction.	Exploiter le sens de variation pour l'obtention d'inégalités.	On traite quelques problèmes d'optimisation.

I. Nombre dérivé et tangente en un point

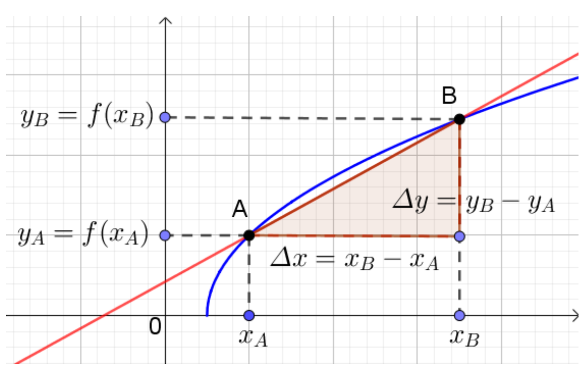
1.1) Taux d'accroissement

Définition 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a, b \in I$, $b \neq a$. On appelle ***taux d'accroissment*** de la fonction f entre a et b, le nombre réel :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

C'est le coefficient directeur de la droite (AB) où A(a ; $f(a)$) et B(b ; $f(b)$).



Autre méthode :

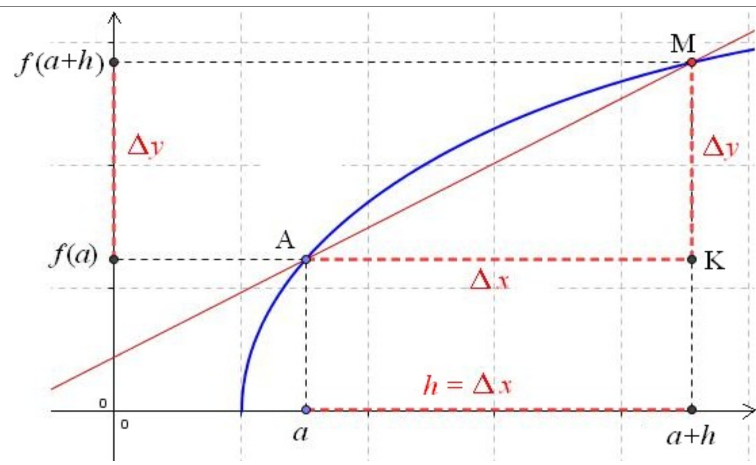
Si on pose $h=b-a$ alors $b=a+h$ et $\Delta x=h$ .On a une deuxième définition :

Définition 2.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a\in I$. Soit h un nombre réel non nul, proche de zéro, tel que $a+h\in I$. On appelle ***taux d'accroissment*** de la fonction f entre a

et $a+h$, le nombre réel : $$m=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$.

C'est le ***coefficient directeur*** de la droite (AM) où A(a ; $f(a)$) et M($a+h$; $f(a+h)$).



Exemple 1.

Le taux d'accroissement de la fonction $f: x \rightarrow x^2$ entre 1 et 1+h est donné par :

$$m=\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h}$$

$$= \frac{1+2\text{h}+h^2-1}{h}$$

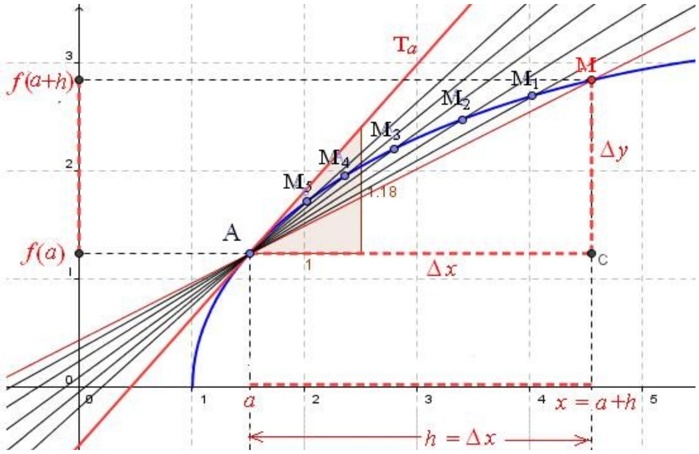
$$= \frac{2\text{h}+h^2}{h} = 2+h$$

1.2) Nombre dérivé en un point

Faisons maintenant tendre h vers 0.

Lorsque h prend des valeurs h_1, h_2, h_3,... « *de plus en plus proches* de 0 », le point M prend successivement les positions M_1, M_2, M_3,....et $a+h$ prend des valeurs « de plus en plus proches de a » ; les droites (AM_1), (AM_2), (AM_3),.... tendent vers une position limite : ***la droite*** T_a ***tangente à la courbe au point d'abscisse a***.

Le coefficient directeur de cette droite T_a s'appelle ***le nombre dérivé*** de la fonction ***au point d'abscisse a*** et se note $f'(a)$.



Définition 3.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$ .On dit que la fonction ***f est dérivable en a*** si le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ tend vers un ***nombre réel fini,*** noté $f'(a)$, lorsque h tend vers 0 et on écrit :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad .$$

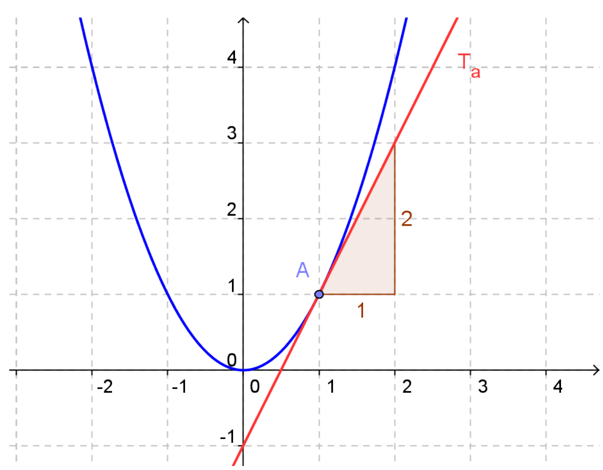
Le nombre réel f '(a), lorsqu'il existe, s'appelle ***le nombre dérivé de la fonction f en a*** et désigne ***le coefficient directeur de la droite tangente à la courbe au point d'abscisse a***. (A connaître par coeur...)

Exemple 2.

Pour la fonction $f : x \to x^2$ vue ci-dessus, nous avons :

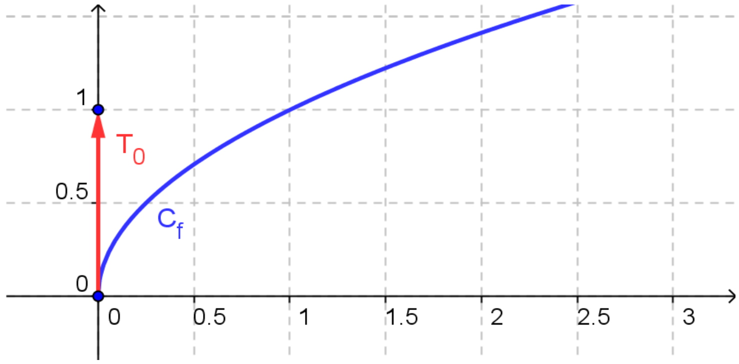
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}(2+h)=2\in\mathbb{R}$$

Donc **la fonction $f : x \to x^2$ est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.**



Exemple 3.

La courbe suivante représente la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$

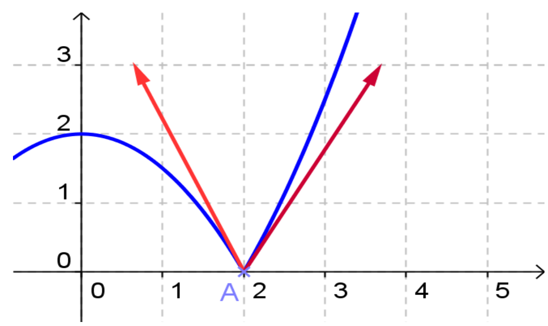


La tangente T_0 à la courbe au point d'abscisse 0 est une droite parallèle à l'axe des ordonnées (verticale). Elle n'a pas de coefficient directeur ! On peut en déduire que **la fonction $f : x \rightarrow \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0**. (*La pente d'une droite verticale est infinie ; une droite parallèle à Oy n'a pas de coefficient directeur !*).

Exemple 4.

La courbe suivante représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

Au point A(2 ; 0) la courbe forme *un angle* et admet deux demi-tangentes qui n'ont pas le même coefficient directeur. On dit que la fonction **f n'est pas dérivable en 2.**



1.3) Équation de la droite tangente

Théorème 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si f est dérivable en a et a pour nombre dérivé $f'(a)$, alors :
la droite $\mathbf{T}_a$ passant par le point A($a, f(a)$) et de coefficient directeur $f'(a)$, est **tangente à la courbe C_f** au point A. L'équation réduite de $\mathbf{T}_a$ est donnée par :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Démonstration.

Soit $M(x ; y)$ un point quelconque du plan. Alors, on a les équivalences suivantes :

$M(x ; y) \in T_a \quad \Leftrightarrow$ Le coefficient directeur de la droite (AM) est $m = f'(a)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y-y_A}{x-x_A}=f'(a) \quad (\textit{méthode infaillible pour retrouver l'équation})$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y-f(a)}{x-a}=f'(a)$$ puis j'écris l'égalité des produits en croix

$$\Leftrightarrow \quad y-f(a)=f'(a)(x-a)$$ et je transpose $f(a)$ à droite.

$$\Leftrightarrow \quad y=f'(a)(x-a)+f(a)$$ CQFD.

Exemple 5.

Nous avons vu que la fonction $f: x \to x^2$ est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

Soit $A(1, f(1)) \in C_f$. On a donc $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$.

L'équation de la droite tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est donnée par :

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ donc $y=2(x-1)+1$ donc $y=2x-2+1$.

Conclusion. L'équation de la droite T_0 tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est :
$y=2x-1$. CQFD

1.4) Comment calculer le nombre dérivé en utilisant la définition ?

Exemple 6. Soit f la fonction définie sur $[-1 ; 5]$ par $f(x)=-x^2+3x-5$.
Calculer le nombre dérivé de f en 2 en utilisant la définition.

On effectue les calculs en deux étapes :

1ère étape : Calcul et simplification du taux d'accroissement en $a = 2$.

Soit h un nombre réel proche de zéro. On calcule le taux d'accroissement entre 2 et $2+h$.

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{-(2+h)^2+3(2+h)-5-[-2^2+3\times 2-5]}{h}$$

$$= \frac{-(2^2+2\times 2\times h+h^2)+3\times 2+3\times h-5-(-3)}{h}$$

$$= \frac{-(4+4h+h^2)+6+3h-5+3}{h}$$

$$= \frac{-4-4h-h^2+3h+6-5+3}{h}$$

$$= \frac{-h^2-h}{h} = \frac{-h^2}{h}-\frac{h}{h} = \boxed{-h-1}$$ puis on simplifie par h.

On obtient le taux d'accroissement de f entre 2 et $2+h$: $\boxed{\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=-h-1}$

2ème étape : Calcul de la limite du taux d'accroissement lorsque h tend vers 0. (Ce qui revient à poser ***pratiquement h* = 0** et calculer, sauf si on tombe sur un dénominateur égal à 0 ou la racine d'un nombre négatif ; auquel cas la dérivée n'est pas définie).

On a : $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to0}(-h-1) = \boxed{-1}$

Conclusion. La fonction f est dérivable en 2 et son nombre dérivé en 2 est :

$$\boxed{f'(2)=-1}$$

CQFD

1.5) Comment calculer le nombre dérivé à la calculatrice ? $f(x)=x^2$; $a=1$.

Casio 35+ ou supérieur	TI 82 ou supérieur	Numworks (la nouvelle !)


OPTN **F4** **F2**
Sur Casio 35+, vous obtenez :
`d/dx(`
Taper ***l'expression de f(x)***, ***une virgule*** et ***la valeur de a*** puis fermer la parenthèse. Vous avez :
`d/dx(X^2,1)`
Enfin, taper sur **EXE**, vous obtenez **2**. Donc : `f'(1)= 2.`
 	
Sur Casio 35+ E, vous obtenez :
$\dfrac{d}{dx}\square\Big\vert_{x=\square}$
Taper ***l'expression de f(x)***, dans le 1er carré et ***a*** dans le 2ème .
Puis taper sur **EXE**, vous obtenez un résultat égal à **2**.
Donc : `f'(1)= 2.`
	Touche **MATHS**
	Descendre à 8 , vous obtenez :
	`nDériv(`
	ou `nbreDérivé(`
	Taper ***l'expression de f(x)***, ***une virgule***, la variable « **X** », ***une virgule***, et ***la valeur de a*** puis fermer la parenthèse. On obtient :
	`nbreDérivé(X²,X,1)`
	Enfin, taper sur **EXE**, vous obtenez `2.` Donc : `f'(1)= 2.`
	
	Sur `TI83 Premium CE`
	Touche **MATHS**
	Descendre à 8 , vous obtenez :
	$\dfrac{d}{d\square}\square\Big\vert_{x=\square}$
	Taper « **X** », la variable dans le 1er carré en bas, ***l'expression de f(x)*** dans le 2ème. Et la valeur de « ***a*** » dans le 3ème .
	Puis taper sur **EXE**, vous obtenez un résultat égal à **2**.
	Donc : `f'(1)= 2.`
		Cliquer sur Fonctions OK.
		- Aller sur Fonctions
		- Taper ***l'expression de f(x)=x²***
		- Allez sur Graphique OK.
		- Aller sur la 3ème option :
		- Nombre dérivé OK (***activer***)
		- Aller sur Tableau OK.
		- Cliquez sur ***f(x)*** OK.
		- Puis ***activer l'option*** :
		Colonne de la fonction dérivée
		Retour au tableau, vous obtenez trois colonnes avec les valeurs de ***x, f(x)*** et ***f'(x).***
		
		Si nécessaire, Cliquer sur l'option « ***Régler l'intervalle*** », pour modifier les valeurs initiales et finales ainsi que ***le pas*** entre les valeurs.
		x ‒ ***f(x)*** ‒ ***f'(x)***
		–1 ‒ 1 ‒ – 2
		0 ‒ 0 ‒ 0
		1 ‒ 1 ‒ 2
		2 ‒ 4 ‒ 4

II. Fonctions dérivées

2.1) Fonction dérivée

Nous venons de définir le nombre dérivé d'une fonction en un point, nous allons maintenant étendre cette notion à tous les points d'un intervalle.

Définition 4.

1°) Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction ***f est dérivable sur l'intervalle I*** si et seulement si elle est dérivable en tout nombre $x \in I$.

2°) Si f est dérivable sur l'intervalle I, alors on définit une nouvelle fonction sur I, notée ***f '*** qui à tout nombre $x \in I$ fait associer le nombre dérivé $f'(x)$

La fonction f' s'appelle ***la fonction dérivée de f*** sur l'intervalle I.

Remarque.

Une fonction f définie sur un domaine D_f, n'est pas nécessairement dérivable en tout point de D_f. On peut dire donc que le domaine de définition $D_{f'}$ de f', qui est contenu dans D_f n'est pas nécessairement égal à D_f.

Nous avons vu ci-dessus que la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Donc $0 \in D_f$ mais $0 \notin D_{f'}$

2.2) Dérivées des fonctions usuelles

Théorème 2. Dérivées des fonctions simples :

Soit f une fonction définie sur I, un intervalle de $\mathbb{R}$ et f' sa fonction dérivée sur I.

Nom de la fonction	Expression de *f*	D_f	Fonction dérivée	$D_{f'}$
1°) Fonction constante	$f(x) = Constante$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
2°) Fonction identité	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$\mathbb{R}$
3°) Fonction carrée:	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
4°) Fonction cube:	$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=3x^2$	$\mathbb{R}$
5°) Fonction puissance de degré n	$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
6°) Fonction racine carrée non dériv. en 0.	$f(x)=\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
7°) Fonction inverse	$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
8°) Fonction inverse d'une puissance de degré n	$f(x)=\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$

Remarque très importante : Nous avons déjà vu que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. Donc, son domaine de dérivation est : $D_{f'}=]0;+\infty[$ (le 0 est exclu !).

Démonstration. **(1ère S)** ***Voir en fin de chapitre*****.**

2.3) Dérivées de certaines fonctions composées

Définition 5.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soient u et v deux fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$.
La fonction somme $\boldsymbol{u+v}$ est la fonction définie sur I par :

$$(u+v)(x)=u(x)+v(x) \text{ pour tout } x\in I.$$

Soit k un nombre réel donné. Alors, la fonction ***ku*** est la fonction produit de ***u*** par *k*, définie sur *I* par :

$$ku(x)=k\times u(x) \text{ pour tout } x\in I.$$

Ces deux fonctions sont dites ***composées***. (On en verra d'autres un peu plus loin).

Exemples.

1°) Si $u(x)=x^2$, alors la fonction produit de u par 5 est la fonction f définie par :

$$f(x) = 5x^2$$

2°) La fonction g définie par : $g(x) = 5x^2 + 3x - 7$ est la somme de trois fonctions simples.

Théorème 3. Dérivée d'une fonction composée

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$, k un nombre réel donné. Alors :
9°) La fonction $u+v$ est dérivable sur I et pour tout $x\in I$: $\boldsymbol{(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)}$.

10°) La fonction $k\,u$ est dérivable sur I et pour tout $x\in I$: $\boldsymbol{(k\,u)'(x) = k\,u'(x)}$.

Remarque :
Ce théorème que nous allons utiliser pour calculer les premières dérivées, peut s'énoncer en langage courant comme suit :

Théorème 3.

9°) La dérivée de la somme de deux fonctions est égale à la somme des dérivées.
10°) Si on multiplie une fonction par un nombre réel *k*, alors la fonction dérivée est aussi multipliée par le même nombre *k*.

Démonstration. ***La démonstration de ce théorème se fera en fin de ce chapitre.***

III. Exemples de calcul des dérivées

Donner le domaine de définition puis le domaine de dérivation puis calculer les dérivées des fonctions suivantes : (On pourra vérifier les calculs à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel dynamique).

1°) $f(x) = 2x^2 - 7x + 12$; $g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 10$;

2°) $h(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ et 3°) $k(x) = 4\sqrt{x} - \frac{5}{x}$

Il suffit de « ***combiner*** » les « ***formules*** » de dérivation des théorèmes 2 et 3.

1°a) Les fonctions f et g sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\times(x^2)' - 7\times(x)' + (12)' \\ &= 2\times 2x - 7 + 0 \\ &= 4x - 7. \end{aligned}$$

Par conséquent, $f'(x) = 4x - 7$.

b) $$\begin{aligned} g'(x) &= 2\times(x^3)' - 5\times(x^2)' + 2\times(x)' - (10)' \\ &= 2\times 3x^2 - 5\times 2x + 2\times 1 - 0 \\ &= 6x^2 - 10x + 2. \end{aligned}$$

Par conséquent, $g'(x) = 6x^2 - 10x + 2$.

2°) La fonction h est la somme de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, donc h est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et pour tout $x \neq 0$, on a :

$h'(x) = 2x + \left(-\frac{1}{x^2}\right)$ donc $h'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$.

3°) La fonction k est la somme de deux fonctions définies sur $[0;+\infty[$ (la partie commune des deux domaines de définition) et dérivable sur $]0;+\infty[$ (pas en 0) et pour tout $x > 0$, on a :

$k'(x) = 4\times\frac{1}{2\sqrt{x}} - 5\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ donc $k'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2}$.

Théorème 2. Dérivées des fonctions simples :

Démonstrations : **(1ère S)**

1°) Fonction constante sur I : pour tout $x \in I$: $f(x) = k$, pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0 \quad .$$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 0 = 0 \in \mathbb{R}$

Conclusion 1 : Toute fonction constante sur I, est dérivable en tout nombre x de I et $f'(x) = 0$.

2°) Fonction identité sur I : pour tout : $x \in I$ $f(x) = x$, pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = \frac{h}{h} = 1 \quad .$$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 1 = 1 \in \mathbb{R}$

Conclusion 2 : La fonction identité définie sur I, est dérivable en tout nombre x de I et $f'(x) = 1$.

3°) Fonction carrée: pour tout : $x \in I$ $f(x) = x^2$, pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$= \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$

$$= \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$$

$$= 2x+h$$

Donc : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (2x+h) = 2x \in \mathbb{R}$

Conclusion 3 : La fonction carrée définie sur I, est dérivable en tout nombre x de I et $f'(x) = 2x$.

4°) Fonction cube: pour tout : $x \in I$ $f(x) = x^3$, pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a :

Tout d'abord, on calcule une nouvelle I.R. : $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

Donc : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2 \in \mathbb{R}$.

Conclusion 4 : La fonction cube définie sur I, est dérivable en tout nombre x de I et $f'(x) = 3x^2$.

5°) Fonction monôme de degré n : (admise)

La fonction « puissance d'exposant n » pour tout : $x \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{f(x) = x^n}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors $\boldsymbol{f'(x) = n\,x^{n-1}}$.

6°) Fonction racine carrée : pour tout $x \in [0\,;+\infty[$: $f(x) = \sqrt{x}$,

On rappelle l'I.R.n°3 : $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$. Donc en particulier, pour tous nombres réels a et b positifs ou nuls : $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b$

Chacun de ces deux facteurs s'appelle la ***quantité conjuguée*** de l'autre. Par suite :

Pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \qquad = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \text{ après simplification.}$$

Pour prendre la limite lorsque h tend vers 0, on distingue deux cas :

- **1er cas : si $x = 0$**. La limite lorsque h tend vers 0, de cette dernière quantité, donne un résultat de la forme $\frac{1}{0}$, donc ce n'est pas un nombre réel « ***fini*** » . Par conséquent la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
- **2ème cas : si $x \neq 0$**. La limite lorsque h tend vers 0 est un nombre réel fini :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \in \mathbb{R}$$

Conclusion 6 : La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. Mais elle est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ donc la fonction f' est définie pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ par : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (pas en 0).

7°) Fonction inverse : pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$: $f(x) = \frac{1}{x}$, Pour tout $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ on a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$$

$$= \frac{\frac{x}{x(x+h)}-\frac{x+h}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \frac{1}{h} \times \frac{-h}{x(x+h)} = \frac{-1}{x(x+h)}$$

Donc $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2} \in \mathbb{R}$

Conclusion 7 : La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et la fonction dérivée f' est définie pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Théorème 3. Dérivées des fonctions composées :

Démonstrations : (1ère S)

9°) Dérivée d'une fonction somme

La fonction somme u + v est définie sur I par : $(u+v)(x)=u(x)+v(x)$ pour tout $x\in I$

Soit h un nombre réel proche de zéro. On calcule le taux d'accroissement entre x et $x+h$.

$$\begin{aligned}\frac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h} &= \frac{u(x+h)+v(x+h)-[u(x)+v(x)]}{h}\\ &= \frac{u(x+h)+v(x+h)-u(x)-v(x)}{h}\\ &= \frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\end{aligned}$$

Par passage à la limite lorsque h tend vers zéro, le premier taux d'accroissement tend vers $u'(x)$ et le deuxième vers $v'(x)$.

Par conséquent : $$\lim_{h\to 0}\frac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h}=u'(x)+v'(x)$$

Conclusion. La fonction $(u+v)$ est dérivable et pour tout $x\in I$:

$$(u+v)'(x)=u'(x)+v'(x)$$

Écriture qu'on peut simplifier en écrivant : $\boxed{(u+v)'=u'+v'}$

10°) Dérivée d'une fonction produit de u par une constante k.

La fonction produit ku est définie sur I par : $ku(x)=k\times u(x)$ pour tout $x\in I$

Soit h un nombre réel proche de zéro. On calcule le taux d'accroissement entre x et $x+h$.

$$\begin{aligned}\frac{ku(x+h)-ku(x)}{h} &= \frac{k\times u(x+h)-k\times u(x)}{h}\\ &= k\times\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\end{aligned}$$

Par passage à la limite lorsque h tend vers zéro, le taux d'accroissement de u tend vers $k\times u'(x)$.

Par conséquent : $$\lim_{h\to 0}\frac{ku(x+h)-ku(x)}{h}=k\times u'(x)$$

Conclusion. La fonction ku est dérivable et pour tout $x\in I$:

$$(ku)'(x)=k\times u'(x)$$

Écriture qu'on peut simplifier en écrivant : $\boxed{(ku)'=k\times u'}$ CQFD.