Pourcentages et taux d'évolution

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Pourcentages Lien entre une évolution et un pourcentage. **Évolutions successives** Évolution réciproque.	• Calculer une évolution exprimée en pourcentage. • Exprimer en pourcentage une évolution. • Connaissant deux taux d'évolution successifs, déterminer le taux d'évolution global. • Connaissant un taux d'évolution, déterminer le taux d'évolution réciproque.	L'objectif est double : – entraîner les élèves à une pratique aisée de techniques élémentaires de calcul sur les pourcentages ; – amener les élèves à avoir une attitude critique vis-à-vis des informations chiffrées. Les situations d'évolutions successives ou d'évolution réciproque conduisent les élèves à s'approprier le coefficient multiplicateur $1+\frac{t}{100}$ comme outil efficace de résolution de problèmes. On fait observer que les évolutions peuvent également être formulées en termes d'indices.

I. Évolution en pourcentage

1.1) Appliquer un pourcentage

Avant d'appliquer ou de calculer un pourcentage, il est nécessaire de préciser la ***population de référence*** ou la ***grandeur*** sur laquelle s'opère ce pourcentage.

Définition 1. *Appliquer un pourcentage t% à une grandeur V, revient à multiplier V par* $\frac{t}{100}$.

$$t\%\ de\ V = V\times\frac{t}{100}$$

Exemple. *Pour calculer 7% (=* $\frac{7}{100}$ *) de 54, on peut procéder de 3 manières :*

$$\begin{aligned} 7\%\text{ de }54 &= 54\times\frac{7}{100} = 54\times0{,}07 = 3{,}78 \quad \text{on calcule d'abord } \frac{7}{100}\\ &= \frac{54}{1}\times\frac{7}{100} = \frac{54\times7}{100} = \frac{378}{100} = 3{,}78\\ &= \frac{54}{100}\times7 = 0{,}54\times7 = 3{,}78 \end{aligned}$$

1.2) Calculer un pourcentage

Exemple. Dans la classe de 1ère ES2, il y a 21 *filles* sur 35 *élèves*.

1°) Calculer le pourcentage des filles dans cette classe.

2°) En déduire le pourcentage des garçons.

1°) Pour calculer un pourcentage, on se ramène à une base de 100. C'est comme s'il y avait 100 élèves dans la classe. On fait alors un tableau de proportionnalité.

Filles	21	t
Total	35	100

On écrit l'égalité des rapports : $\frac{t}{100}=\frac{21}{35}$ ou bien, ce qui revient au même, on écrit l'***égalité des produits en croix***. Ce qui donne : $35\times t=21\times 100$.
On obtient donc :

$$t=\frac{21\times 100}{35}=60$$

Conclusion. Les filles représentent 60% des élèves de cette classe.

2°) L'ensemble de la classe représente 100%. Donc le pourcentage des garçons est : 100% – 60% = 40%.

Conclusion. Les garçons représentent 40% des élèves de cette classe.

II. Évolution exprimée en pourcentage

2.1) Définitions et propriétés

L'augmentation ou la diminution d'une grandeur pendant une période, ou entre deux dates, s'appelle une évolution. On cherche à déterminer la nouvelle valeur connaissant la valeur initiale et le taux évolution de cette grandeur.

On s'en sert beaucoup pour calculer des variations de grandeurs économiques : PIB (produit intérieur brut), masse salariale, inflation, chômage, investissements ou dépenses publiques.

Propriété 1.
Appliquer une *augmentation* de t% à une grandeur, revient à la multiplier par $1+\frac{t}{100}$. Appliquer une *diminution* de t% à une grandeur, revient à la multiplier par $1-\frac{t}{100}$.

Démonstration. Soient V_0 et V_1 deux nombres réels strictement positifs. On note V_0 la *valeur initiale* et V_1 la *valeur finale* d'une certaine grandeur. On dit aussi que V_0 est la *valeur de départ* et V_1 la *valeur d'arrivée*. Alors :

- Si on applique une augmentation de *t%* à V_0, on obtient :
  $V_1 = V_0 + t\%$ de V_0

Donc : $V_1 = V_0 + \frac{t}{100} \times V_0$ Donc : $V_1 = 1 \times V_0 + \frac{t}{100} \times V_0$

Ce qui donne : $V_1 = \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times V_0$

- D'une manière analogue, si on applique une diminution de t% à V_0, on obtient : $V_1 = \left(1 - \frac{t}{100}\right) \times V_0$.

Exemples.

Une augmentation de 5% revient à multiplier par : $1 + 5\% = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$

Une diminution de 8% revient à multiplier par : $1 - 8\% = 1 - \frac{8}{100} = 0{,}92$

> ***Définition 2.***
> *Soient V_0 et V_1 les valeurs d'une grandeur à deux dates différentes.*
> *Les coefficients $k = \left(1 + \frac{t}{100}\right)$ ou $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$ s'appellent les **coefficients multiplicateurs** qui permettent de passer de V_0 à V_1.*
> *Ce qui donne dans les deux cas :*
>
> $$V_1 = k \times V_0$$

Remarques.

*1°) Une augmentation correspond à un coefficient multiplicateur **k > 1**.*

2°) Une *diminution* correspond à un coefficient multiplicateur **0 < *k* < 1**.

On obtient le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} V_0 \arrow[rr, bend left, "\times k"] & & V_1 \arrow[ll, bend left, ":k"] \end{tikzcd}$$

3°) Dans certains ouvrages le coefficient multiplicateur est noté : **CM**.

> **Propriété n°2.**
> Soient V_0 et V_1 les valeurs d'une grandeur à deux dates différentes. Alors, le ***coefficient multiplicateur*** qui permet de passer de V_0 à V_1 vérifie les égalités équivalentes suivantes :
>
> ➔ Calcul d'une *valeur finale* : (1) $V_1 = k \times V_0$
>
> ➔ Calcul d'une *valeur initiale* : (2) $V_0 = \frac{V_1}{k}$
>
> ➔ Calcul du *coefficient multiplicateur* : (3) $k = \frac{V_1}{V_0}$

2.2) Exprimer une évolution en pourcentage

On considère deux nombres réels strictement positifs V_0 et V_1 qui représentent les valeurs respectives d'une grandeur entre deux dates. On peut exprimer l'évolution de la grandeur, en pourcentage, entre V_0 et V_1.

Définition 3.
Soient V_0 et V_1 les valeurs d'une grandeur à deux dates différentes. Alors, le ***taux d'évolution*** T qui permet de passer de V_0 à V_1 est défini par :

$$T=\frac{V_1-V_0}{V_0}=\frac{Valeur\ finale-Valeur\ initiale}{valeur\ initiale}$$ sous ***forme décimale***

Le ***taux d'évolution exprimé en pourcentage*** de V_0 à V_1 est égal à **t%** où **:**

$$t=T\times 100 \quad \text{ou encore :} \quad t=\frac{V_1-V_0}{V_0}\times 100$$

Remarques.

Une ***augmentation*** correspond à un taux d'évolution positif : $\boldsymbol{T>0}$.
Une ***diminution*** correspond à un taux d'évolution négatif $\boldsymbol{T<0}$.

Exemple.
Le chiffre d'affaire d'une entreprise est passé de 65 500 € en 2016 à 72 050 € en 2017.

1°) *Calculer le coefficient multiplicateur de 65 500 à 72 050.*
2°) *Calculer le taux d'évolution du chiffre d'affaire, exprimé en pourcentage.*

1°) Par définition, le coefficient multiplicateur de 65 500 à 72 050 est donné par :

$$k=\frac{V_1}{V_0}=\frac{72050}{65500}=1,1$$

Donc le coefficient multiplicateur entre 65 500 à 72 050 est : $k=1,1$.

2°) Par définition, le ***taux d'évolution***, sous la ***forme décimale***, entre 65 500 et 72 050 est donné par la formule :

$$T=\frac{V_1-V_0}{V_0}=\frac{72050-65500}{65500}=0,1$$

Donc le ***taux d'évolution en pourcentage*** entre 65 500 à 72 050 est donné par la formule :

$$t=T\times 100=0,1\times 100=10. \quad \text{Donc} \quad T=10\,\%.$$

Conclusion. Le chiffre d'affaire de cette entreprise a *augmenté de 10%* entre 2016 et 2017.

2.3) Relations entre taux d'évolution et coefficient multiplicateur

Prpriété 3.
Soient V_0 et V_1 les valeurs d'une grandeur à deux dates différentes. Alors, le *taux d'évolution* T et le *coefficient multiplicateur* k sont liés par les formules suivantes :

$$T = k-1 \quad \text{ou encore} \quad k = 1+T.$$

Démonstration.

On sait que : $k = \dfrac{V_1}{V_0}$ donc $T = \dfrac{V_1 - V_0}{V_0} = \dfrac{V_1}{V_0} - \dfrac{V_0}{V_0} = k-1.$

D'où $T = k-1$ et $k = 1+T.$

Exemple.

Une augmentation de 15% entre deux dates, correspond à un taux d'évolution $T = 15\% = \dfrac{15}{100} = 0{,}15$ et un coefficient multiplicateur $k = 1+T = 1+0{,}15$, donc $k = 1{,}15$.

III. Évolutions successives

3.1) Définitions et propriétés

Prpriété 4 et définitions.

Soit n un nombre entier naturel, non nul.

Soient $V_0, V_1, \ldots V_n$ les valeurs d'une grandeur sur n périodes successives correspondant à des taux d'évolution $T_1, T_2, \ldots, T_n$ et des coefficients multiplicateurs $k_1, k_2, \ldots, k_n$ respectivement.

Alors, le ***coefficient multiplicateur global*** entre V_0 et V_n est égal au produit des coefficients multiplicateurs de cette période :

$$k = k_1 \times k_2 \times \ldots k_n \quad \text{ou encore :} \quad k = (1+T_1)\times(1+T_2)\times\ldots\times(1+T_n)$$

Le ***taux d'évolution global*** est : $T = (1+T_1)\times(1+T_2)\times\ldots\times(1+T_n) - 1$

Démonstration.

$$\begin{tikzcd}
V_0 \arrow[r, "\times k_1"] \arrow[rrrrr, bend right, "\times k"'] & V_1 \arrow[r, "\times k_2"] & V_2 & \cdots & V_{n-1} \arrow[r, "\times k_n"] & V_n
\end{tikzcd}$$

Par définition d'un coefficient multiplicateur, on sait que $V_1 = k_1 \times V_0$, $V_2 = k_2 \times V_1$ et ainsi de suite jusqu'à $V_n = k_n \times V_{n-1}$.

Donc, par multiplications successives, on obtient : $V_n = k_1 \times k_2 \times \ldots k_n \times V_0$.
Ce qui donne le premier résultat.

En remplaçant chaque coefficient multiplicateur par son expression en fonction du taux d'évolution associé, on obtient le deuxième résultat.

3.2) Exercices résolus

Déterminer la nature et le taux d'évolution pour chacune des évolutions successives suivantes :

1°) *Augmentation de 15%, suivie d'une diminution de 15%.*
2°) *Augmentation de 15%, suivie de 2 diminutions de 10% et 5% successivement.*
3°) *Diminution de 15%, suivie de 2 augmentations de 10% et 5% successivement.*

1°) On cherche le coefficient multiplicateur global.

- *Augmentation de 15%* $\rightarrow$ $k_1 = 1 + 15\% = 1{,}15$
- *Diminution de 15%* $\rightarrow$ $k_2 = 1 - 15\% = 0{,}85$

Le coefficient multiplicateur global est donné par :

$$k = k_1 \times k_2 = 1{,}15 \times 0{,}85 = 0{,}9775.$$

D'une part, k < 1, donc il s'agit d'une diminution.
Et d'autre part, $k = 0{,}9775 = 1 - 0{,}0225 = 1 - 2{,}25\%$

Conclusion 1. L'évolution constituée d'une *augmentation de 15%, suivie d'une diminution de 15%* correspond à une ***diminution de 2,25%***.

2°) On cherche le coefficient multiplicateur global.

- *Augmentation de 15%* $\rightarrow$ $k_1 = 1 + 15\% = 1{,}15$
- *Diminution de 8%* $\rightarrow$ $k_2 = 1 - 10\% = 0{,}9$
- *Diminution de 7%* $\rightarrow$ $k_3 = 1 - 5\% = 0{,}95$

Le coefficient multiplicateur global est donné par :

$$k = k_1 \times k_2 \times k_3 = 1{,}15 \times 0{,}9 \times 0{,}95 = 0{,}98325.$$

D'une part, k < 1, donc il s'agit d'une diminution.
Et d'autre part, $k = 0{,}98325 = 1 - 0{,}01675 = 1 - 1{,}675\%$

Conclusion 2. L'évolution constituée d'une *augmentation de 15%, suivie de deux diminution de 10% et 5% successivement,* correspond à une ***diminution de 1,675%***.

3°) On cherche le coefficient multiplicateur global.

- *Diminution de 15%* $\rightarrow$ $k_1 = 1 - 15\% = 0{,}85$
- *Augmentation de 8%* $\rightarrow$ $k_2 = 1 + 10\% = 1{,}1$
- *Augmentation de 7%* $\rightarrow$ $k_3 = 1 + 5\% = 1{,}05$

Le coefficient multiplicateur global est donné par :

$$k=k_1\times k_2\times k_3=0{,}85\times 1{,}1\times 1{,}05=0{,}98175\,.$$

D'une part, k < 1, donc il s'agit d'une diminution.
Et d'autre part, $k=0{,}98175=1-0{,}01825=1-1{,}825\,\%$

<u>Conclusion 2</u>. L'évolution constituée d'une *diminution de 15%, suivie de deux augmentations de 10% et 5% successivement,* correspond à une ***diminution de 1,825%***.

<u>Remarque</u>

L'ordre de ces évolutions successives n'a aucune importance.

VI. Évolutions réciproques

4.1) Définitions et propriétés

<u>Définition 4</u>.
Soient V_0 et V_1 les valeurs d'une grandeur à deux dates différentes. Les évolutions qui permettent de passer de V_0 à V_1 d'une part et de V_1 à V_0 d'autre part, s'appellent des ***<u>évolutions réciproques</u>*** l'une de l'autre.

<u>Remarques</u>.
Une évolution réciproque permet de nous ramener à la valeur de départ.

<u>Prpriété 5</u>. *Les coefficients multiplicateurs de deux évolutions réciproques sont inverses l'un de l'autre. Autrement dit :*

Soient V_0 et V_1 les valeurs d'une grandeur à deux dates différentes. On note T (resp. T') le *taux d'évolution* et k (resp. k') le *coefficient multiplicateur* qui permettent de passer de V_0 à V_1 (resp. de V_1 et V_0). Alors :

$$k'=\frac{1}{k} \quad \text{et} \quad T'=\frac{1}{1+T}-1$$

<u>Démonstration</u>.

$$\begin{tikzcd} V_0 \arrow[r, "\times k"] \arrow[rr, bend right, "\times 1"'] & V_1 \arrow[r, "\times k'"] & V_0 \end{tikzcd}$$

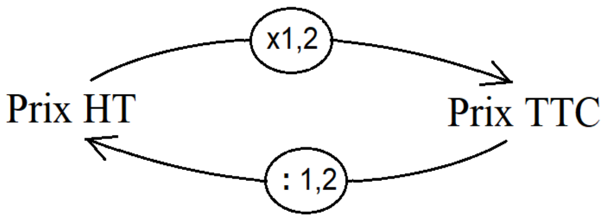
D'une part, le coefficient multiplicateur de V_0 à V_0 est égal à 1. Et d'autre part, il est égal au produit des coefficients multiplicateurs k et k'. Donc : $k\,k'=1$.
On en déduit le calcul de k' :

$k'=\dfrac{1}{k}$ et par suite $1+T'=\dfrac{1}{1+T}$. D'où les deux résultats.

4.2) Exercice résolu

Une imprimante coûte 78 € TTC. Sachant que le taux de TVA est de 20%, calculer le prix HT de cette imprimante.

Le taux de TVA est de 20%, donc le coefficient multiplicateur qui permet de passe du Prix HT au prix TTC est $k=1+20\%=1+\frac{20}{100}=1+0{,}20=1{,}2$.
Donc k = 1,2.



Le coefficient multiplicateur k' qui permet de passe du Prix TTC au Prix HT est égal à l'inverse de k. Donc : $k'=\frac{1}{k}=\frac{1}{1{,}2}=0{,}8333...$ On utilise l'écriture fractionnaire. On obtient ainsi :

$$\text{Prix HT}=k'\times\text{Prix TTC}=\frac{1}{1{,}2}\times 78=65.$$

Conclusion. Le prix HT de cette imprimante est de 65 €.

V. Utilisation de l'indice

5.1) Définitions et propriétés

Définition 5.
Soient V_0 et V_1 les valeurs d'une grandeur à deux dates différentes.
On appelle ***indice simple en base 100*** de V_1 par rapport à V_0, ou simplement ***indice*** de V_1 par rapport à V_0, ***le nombre I*** tel que l'évolution qui fait passer de V_0 à V_1 fait passer de 100 à ***I*** proportionnellement. Ce qui donne :

$$(1)\quad I=\frac{100\times V_1}{V_0} \qquad \text{et} \qquad (2)\quad I=100\times\frac{V_1}{V_0}$$

On fait un tableau de proportionnalité en faisant correspondre V_0 à 100 et V_1 à la valeur de l'indice I :

V_0	V_1
100	I

5.2) Relation entre l'indice et le coefficient multiplicateur

Propriété n°6. On considère deux nombres réels strictement positifs V_0 et V_1. On note k le ***coefficient multiplicateur*** de V_0 à V_1 et I l'indice de de V_1 par rapport à V_0. Alors on a les deux relations :

$$(3)\quad I=100\times k \qquad \text{et} \qquad (4)\quad k=\frac{I}{100}$$

Exemple

Le prix au mètre carré de l'immobilier dans le 14ème arrondissement de Paris au premier trimestre 2018 est de 8990 €. Alors qu'il était de 8770 € au premier trimestre 2017.

1°) Calculer l'indice des prix au mètre carré de l'immobilier dans le 14ème arrondissement de Paris au premier trimestre 2018 en prenant comme base 100 le premier trimestre 2017.

2°) En déduire le taux d'évolution du prix au mètre carré de l'immobilier dans le 14ème arrondissement de Paris entre le premier trimestre 2017 et le premier trimestre 2018.

1°) D'après la deuxième formule de définition de l'indice à base 100, on a :

$$I=100\times\frac{V_1}{V_0}=100\times\frac{8990}{8770}=102{,}50855\ldots$$

On en déduit que $I\simeq 102{,}51$

2°) Je calcule d'abord le coefficient multiplicateur entre les deux valeurs de 2017 et 2018. On sait que $I=100\times k$, donc $k=\frac{I}{100}=\frac{102{,}51}{100}=1{,}0251$

Maintenant, k = 1,0251 et $T=k-1$ donc : $T=1{,}0251-1=0{,}0251$.
Enfin, $t=100\times T=100\times 0{,}0251=2{,}51$.

Conclusion. Le prix au mètre carré de l'immobilier dans le 14ème arrondissement de Paris a augmenté de 2,51% entre le premier trimestre 2017 et le premier trimestre 2018.

5.3) Relation entre l'indice et le taux d'évolution

Propriété n°7. On considère deux nombres réels strictement positifs V_0 et V_1. On note T le ***taux d'évolution*** (sous forme décimale) de V_0 à V_1 et I l'indice de de V_1 par rapport à V_0. Alors, on a les deux relations :

$$(5)\quad I=100\times(1+T) \qquad \text{et} \qquad (6)\quad T=\frac{I-100}{100}$$

Exemple.

En 2012, le chiffre d'affaire d'une entreprise a baissé de 15% par rapport à 2011.
1°) Calculer le coefficient multiplicateur du chiffre d'affaire entre 2011 et 2012.
2°) En déduire l'indice d'évolution du chiffre d'affaire pour la même période.

1°) On note V_0 et V_1 les chiffres d'affaire de l'entreprise en 2011 et 2012 respectivement. D'après l'énoncé, le taux d'évolution du chiffre d'affaire entre V_0 et V_1 est :

$$T=-15\%=\frac{-15}{100}=-0{,}15$$

Donc, le coefficient multiplicateur est donné par : $k=1+t=1+(-0{,}15)=0{,}85$

Conclusion : Le coefficient multiplicateur est : $k=0{,}85$.

2°) Nous avons deux méthodes à notre disposition pour calculer l'indice :

- soit à partir du taux d'évolution en appliquant la formule (5)

$$I=100\times(1+t)$$
$$I=100\times[1+(-0{,}15)]$$
$$I=100\times0{,}85$$
$$I=85$$

- soit à partir du taux d'évolution en appliquant la formule (3)

$$I=100\times k$$
$$I=100\times0{,}85$$
$$I=85$$

Conclusion : L'indice d'évolution du chiffre d'affaire est : $I=85$

Remarque importante. Le point de pourcentage

Un ***point de pourcentage*** est une unité utilisée pour désigner la différence arithmétique entre deux **pourcentages** appliquée à la même grandeur.

Exemple

- Une taxe qui passe de 5,5% à 11% va ***doubler***. Donc elle subit une une **augmentation** de 100% en pourcentage. Par contre, on dira qu'elle a subit une une *augmentation de 5,5 points* **de** *pourcentage*, et non une **augmentation** de 5,5 %.
- *Une augmentation* **en** *pourcentage* de 5,5% : $V_0 \rightarrow V_1=5{,}5\times(1+5{,}5\%)=5{,}8025$

Dans les infos, à la radio ou à la télé, lorsqu'on parle de modifications des charges sociales ou patronales, on parle d'augmentation ou de diminution de ces taux en points ou en %.

On dira par exemple : *La CSG a augmenté entre 2017 et 2018 de* **1,7 points**. *Cela semble minime !*

Elle est passée de 6,6% à 8,3%. On a bien : 8,3 – 6,6 = 1,7 points.

Par contre le taux d'augmentation entre les deux valeurs : $T=\frac{8{,}3-6{,}6}{6{,}6}=0{,}257575...=25{,}6\%$.

La CSG a subi une augmentation de **25,6%** *environ. C'est énorme !* A chacun son discours !