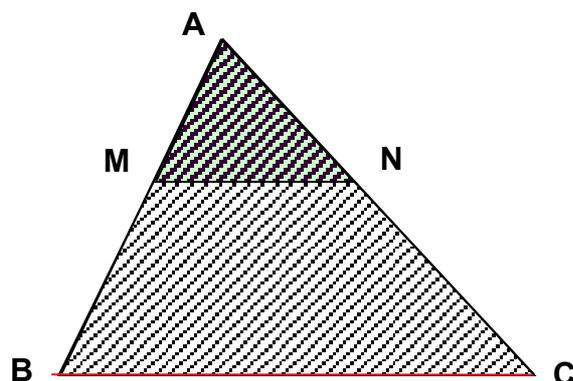


Chapitre 3

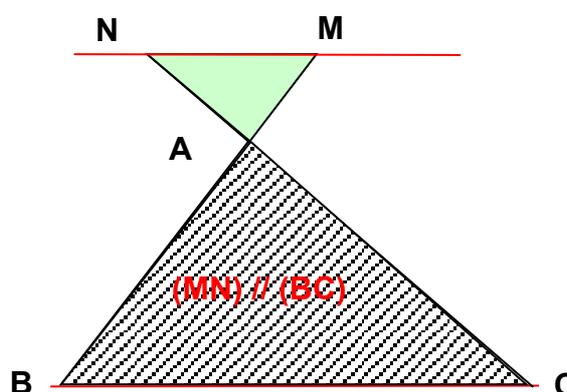
Le théorème de Thalès et sa réciproque

I. Le théorème de Thalès

1^{ère} configuration : dans le triangle (4^e)



1^{ère} configuration : Nœud papillon



Théorème de Thalès (1^{ère} configuration : dans le triangle)

Théorème n°1 : Dans un triangle ABC quelconque, si M est un point du côté [AB], N est un point du côté [AC] et si les deux droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors il y a égalité des trois rapports :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Théorème de Thalès (2^{ème} configuration : nœud papillon)

Théorème n°2 : Si les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et si les deux droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors il y a égalité des trois rapports :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Avec des symboles :

Si $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN) // (BC)$ **alors** $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

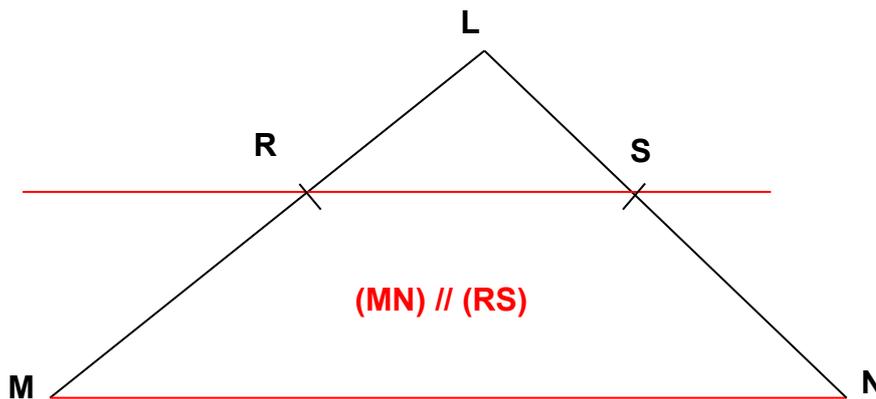
On remarque au passage que cette dernière formulation du théorème est valable pour les deux configurations : dans le triangle et le nœud papillon.

Autrement dit :

Théorème n°3 : Si les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et si les deux droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors les longueurs des côtés correspondants des deux triangles AMN et ABC sont proportionnelles.

Exemple 1 : LMN est un triangle tel que LM = 10cm, LN = 8cm et MN = 12cm.

On place le point S sur le côté [LN] tel que LS = 3cm, puis le point R sur le côté [LM] tel que les droites (RS) et (MN) soient parallèles. Calculer LR puis RS. Justifier votre réponse.



Modèle de rédaction :

Dans le triangle LMN, R est un point du côté [LM], S est un point sur le côté [LN] et les droites (RS) et (MN) soient parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thalès, on a égalité des trois rapports :

$$\frac{LR}{LM} = \frac{LS}{LN} = \frac{RS}{MN}$$

Avec les valeurs :

$$\frac{LR}{10} = \frac{3}{8} = \frac{RS}{12}$$

1°) Calcul de LR

Je garde (les 2 rapports utiles) $\frac{LR}{10} = \frac{3}{8}$

J'écris l'égalité des produits en croix : $LR \times 8 = 10 \times 3$

Je divise les deux côtés par 8 et je simplifie : $\frac{LR \times \cancel{8}}{\cancel{8}} = \frac{10 \times 3}{8}$

J'obtiens : $LR = \frac{30}{8}$

Donc $LR = 3,75 \text{ cm}$

1°) Calcul de RS

Je garde (les 2 rapports utiles) $\frac{3}{8} = \frac{RS}{12}$

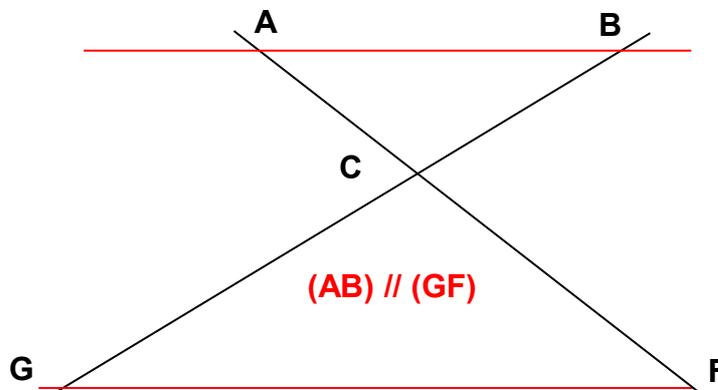
J'écris l'égalité des produits en croix : $8 \times RS = 3 \times 12$

Je divise les deux côtés par 8 et je simplifie : $\frac{\cancel{8} \times RS}{\cancel{8}} = \frac{3 \times 12}{8}$

J'obtiens : $LM = \frac{3 \times \cancel{4} \times 3}{\cancel{4} \times 2}$

Donc $RS = 4,5 \text{ cm} .$

Exemple 2 (Brevet des collèges 2006) : La figure ci-dessous n'est pas réalisée en vraie grandeur, elle n'est pas à reproduire. Les points A, C et F sont alignés, ainsi que les points B, C et G. Les droites (AB) et (GF) sont parallèles. On donne : AB = 3 cm, FC = 8,4 cm et FG = 11,2 cm. Calculer la longueur CA.



Modèle de rédaction :

Les droites (AF) et (BG) sont sécantes en C et les droites (AB) et (GF) sont parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thalès, on a égalité des trois rapports :

$$\frac{CA}{CF} = \frac{CB}{CG} = \frac{AB}{GF}$$

Avec les valeurs : $\frac{CA}{8,4} = \frac{BC}{GF} = \frac{3}{11,2}$

Calcul de CA.

Je garde (les 2 rapports utiles) $\frac{CA}{8,4} = \frac{3}{11,2}$

J'écris l'égalité des produits en croix : $CA \times 11,2 = 8,4 \times 3$

Je divise les deux côtés par 11,2 et je simplifie : $\frac{CA \times \cancel{11,2}}{\cancel{11,2}} = \frac{8,4 \times 3}{11,2}$

J'obtiens : $CA = \frac{9}{4}$

Donc $CA = 2,25 \text{ cm} .$

II. Agrandissement – Réduction.

Agrandir, c'est multiplier toutes les dimensions d'une figure géométrique par un même nombre $k \neq 0$ avec $k > 1$, en conservant la forme de la figure.

Réduire c'est multiplier toutes les dimensions d'une figure géométrique par un même nombre $k \neq 0$ avec $0 < k < 1$, en conservant la forme de la figure.

Définition : Si deux figures ont la **même forme** et des **longueurs proportionnelles**, on dit que l'une est un **agrandissement** ou une **réduction** de l'autre.

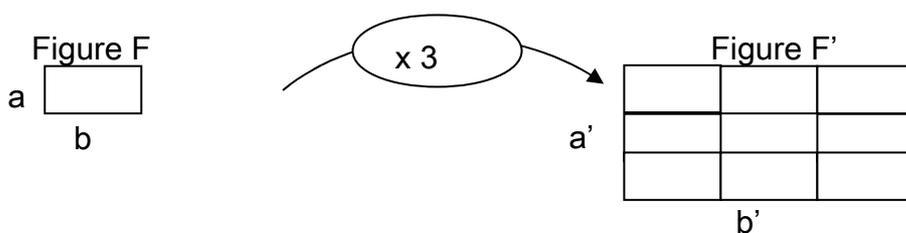
Remarques :

1°) Dans un agrandissement ou une réduction, **les mesures des angles, la perpendicularité et le parallélisme sont conservés.**

2°) Naturellement, si on peut multiplier toutes les dimensions par k dans un sens, on peut toutes les diviser par $k \neq 0$ pour revenir dans l'autre sens !

3°) Si k est le coefficient de proportionnalité des longueurs de la figure F à la figure F' , alors :

- Si $k > 1$, la figure F' est un **agrandissement** de la figure F ;
- Si $0 < k < 1$, la figure F' est **une réduction** de la figure F .



Les deux figures sont des rectangles (de même forme) et les dimensions de la figure F' s'obtiennent en multipliant les dimensions de la figure F par $k = 3$. Par conséquent : F' est un agrandissement de F et F est une réduction de F' .

Propriété :

Lorsqu'on agrandit ou on réduit une figure, si les dimensions sont (toutes) multipliées par un même nombre $k \neq 0$, en conservant la même forme, alors **le périmètre P est multiplié par k et l'aire A est multipliée par k^2 .**

$$P' = k \times P \quad \text{et} \quad A' = k^2 \times A$$

III. Contraposée et réciproque du théorème de Thalès

Nous avons déjà vu en 4^{ème} des propositions logiques construites avec « Si...condition, alors... conclusion ». Par exemple :

« **Si j'habite à Paris, alors j'habite en France** ». Cette proposition logique est vraie.

La réciproque (proposition écrite dans l'autre sens !) s'écrit :

« **Si j'habite en France, alors j'habite à Paris** ». Cette proposition logique est fausse.

Dans cet exemple, on dit que « la réciproque est fausse ».

Mais, ce qu'on appelle « **la contraposée** » est la proposition logique :

« **Si je n'habite pas en France, alors je n'habite pas à Paris** ».

Cette proposition est VRAIE. Ce qui se traduit par :

« Si la conclusion est fausse, alors la condition est (forcément) fausse »

Contraposée du théorème de Thalès.

Théorème n°4 : Si les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A , si les points B, A et M sont alignés dans cet ordre et si les points C, A et N sont alignés dans le même ordre ; si de plus deux des trois rapports $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$ ne sont pas égaux, alors les deux droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

Réciproque du théorème de Thalès.

Théorème n°5 : Si les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A , si les points B, A et M sont alignés dans cet ordre et si les points C, A et N sont alignés dans le même ordre ; si deux trois rapports $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$ sont égaux, alors les deux droites (MN) et (BC) sont parallèles.

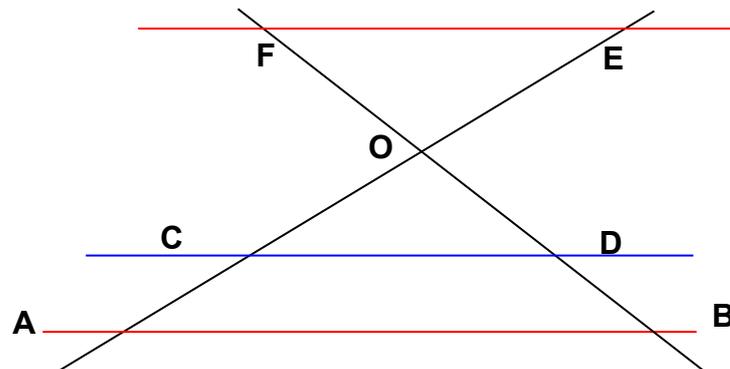
Exemple 1 (Brevet des collèges 2005).

Sur le dessin ci-dessous, les points A, C, O, E sont alignés ainsi que les points B, D, O et F. (On ne demande pas de faire le dessin).

De plus, on donne les longueurs suivantes :

CO = 3 cm, AO = 3,5 cm, OB = 4,9 cm, OD = 1,8 cm, OF = 2,8 cm et OE = 2 cm.

- 1) Montrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.
- 2) Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

**Modèle de rédaction :**

1°) *Montrons que les droites (AB) et (EF) sont parallèles.*

Naturellement, pour cette question, on se place dans le nœud papillon.

Les droites (BF) et (AE) sont sécantes en O.

Les points A, O, E sont alignés dans cet ordre et les points B, O et F sont alignés dans le même ordre. Je calcule séparément les rapports :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{OF}{OB} = \frac{2,8}{4,9} = \frac{28}{49} = \frac{4 \times 7}{7 \times 7} = \frac{4}{7} \\ \frac{OE}{OA} = \frac{2}{3,5} = \frac{2 \times 2}{3,5 \times 2} = \frac{4}{7} \end{array} \right.$$

On constate que $\frac{OF}{OB} = \frac{OE}{OA}$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut affirmer que les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

2°) *Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?*

Naturellement, pour cette question, on se place dans le triangle OAB.

Les droites (AC) et (BD) sont sécantes en O.

Les points A, C, O sont alignés dans cet ordre et les points B, D et O sont alignés dans le même ordre. Je calcule séparément les rapports :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{OC}{OA} = \frac{3}{3,5} = \frac{3 \times 2}{3,5 \times 2} = \frac{6}{7} \\ \frac{OD}{OB} = \frac{3,5}{4,9} = \frac{35}{49} = \frac{5}{7} \end{array} \right.$$

On constate que $\frac{OC}{OA} \neq \frac{OD}{OB}$

Donc, d'après la contraposée du théorème de Thalès, on peut affirmer que les droites (AB) et (EF) ne sont pas parallèles.

CQFD