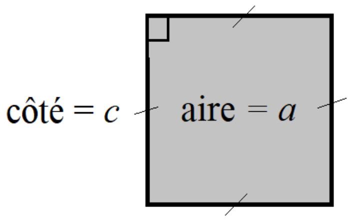
Racines carrées

I. Activité

Exemple 1. ABCD est un carré de coté c et d'aire a.

1. Choisir des valeurs de c puis calculer a.
   Choisir des valeurs de a puis calculer c.
2. Déterminer le nombre c dont le carré est égal à 20.



1°) On choisit différentes valeurs dans un sens et dans l'autre

$c = 3$ cm $\rightarrow$ $a = 9$ cm²,	$c = 6$ cm $\leftarrow$ $a = 36$ cm²
$c = 4$ cm $\rightarrow$ $a = 16$ cm²	$c = 7$ cm $\leftarrow$ $a = 49$ cm²
$c = 5$ cm $\rightarrow$ $a = 25$ cm²	$c = ?$ $\leftarrow$ $a = 20$ cm²

2°) Si $a = 20$ cm², on cherche le nombre positif *c dont le carré est égal* à 20.

20 est compris entre 16 et 25, donc c est compris entre 4 et 5.

Faites plusieurs essais. Par exemple : pour $c = 4{,}5$.

On calcule $c^2 = 20{,}25$. C'est trop grand. Recommencez avec d'autres nombres 4,45.

On peut aussi utiliser la touche « $\boxed{\sqrt{\ }}$ » de la calculatrice (limitée à 10 chiffres). On obtient : $\sqrt{(20)} = 4{,}472135955$. Mais attention ! A-t-on $(4{,}472135955)^2 = 20$?

A priori, c'est faux puisque $(4{,}472135955)^2$ est un nombre qui a 18 décimales et doit se terminer par sa 18ème décimale égale à 5.

En fait, le nombre 4,472 135 95**5** n'est qu'une valeur approchée de c, dont le carré est égal à 20. Cette valeur de c est arrondie à la 9ème décimale.

Avec un logiciel, on a cherché une valeur approchée avec 100 décimales :
4.472135954| **9**99579392818347337462552470881236719223051448541794490821041851275609798828828816757564550… etc.

Vous remarquerez au passage que le 9ème chiffre de c étant égal à 5, n'est autre que l'arrondi de 4.47213595**4**| **9** au milliardième près (en gras et en rouge) !

II. Racine carrée d'un nombre positif

2.1) Définitions et exemples

Théorème et définitions 1.

Soit a un nombre positif. ***Il existe un seul nombre positif c dont le carré est égal à a.***
Ce nombre est appelé « ***racine carrée de a*** » et se note $\sqrt{a}$. Ce qui donne :

$$c^2=a \quad \text{si et seulement si} \quad c=\sqrt{a}$$

Le symbole $\sqrt{\ }$ s'appelle un « ***radical*** ».

Exemples

$\sqrt{-2}$ n'existe pas car il n'existe aucun nombre dont le carré est égal à – 2.
$\sqrt{25}=5$ car $5^2=25$ et 5 > 0. Ce qui n'est pas le cas pour (– 5).

2.2) Premières propriétés

Propriétés 1. Quels que soient le nombre a positif, on a les propriétés suivantes :
(P_0) : $\sqrt{a}\geqslant 0$
(P_1) : [$\sqrt{a}=0$ si et seulement si $a = 0$]
(P_2) : $(\sqrt{a})^2=a$
(P_{2bis}) : $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$
(P_3) : $\sqrt{a^2}=a$

Les opérations « racine carrée » et « élever au carré » sont réciproques l'une de l'autre. Ce qui donne les propriétés P_2 et P_3. A la calculatrice, les touches X^2 et $\sqrt{\ }$ permettent d'effectuer les calculs dans un sens et dans l'autre.

$$\begin{tikzcd} c=\sqrt{a} \arrow[r, bend left, "\boxed{X^2}"] & a=c^2 \arrow[l, bend left, "\boxed{\sqrt{\ }}"] \end{tikzcd}$$

En effet : 1°) Par définition la racine carrée d'un nombre positif est un nombre positif. Et 0 est le seul nombre positif dont le carré est égal à 0. (P_1)

2°) Comme $c=\sqrt{a}$ équivaut à $c^2=a$, en remplaçant c par $\sqrt{a}$ on obtient : $(\sqrt{a})^2=a$

2°) Si $a\geqslant 0$, alors est le seul nombre positif dont le carré est égal à a^2.
Donc : $\sqrt{a^2}=a$ (P_3).

Exemples. $(\sqrt{8})^2=\sqrt{8}\times\sqrt{8}=8$ et $\sqrt{5^2}=\sqrt{25}=5$.

2.3) Nature de ces nombres

Définition. Si a est un nombre positif, alors $\sqrt{a}$ peut être un *nombre entier*, un nombre *décimal* ou un nombre *rationnel* ou encore un ***nombre irrationnel*** (comme π ou $\sqrt{2}$).

Exemples

$\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont des nombres irrationnels.
$\sqrt{25}=5$ est un nombre entier.
$\sqrt{2{,}25}=1{,}5$ est un nombre décimal.
$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$ est un nombre rationnel, car $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$.
$\sqrt{\pi^2}=\pi$ est un nombre irrationnel.

Pour obtenir un nombre entier, il faut choisir un nombre dans la liste des nombres entiers *carrés parfaits* : 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100 ; 121 ; 144 ;…

Si a est un entier qui n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{a}$ est un ***nombre irrationnel***.

III. Opérations et racines carrées

3.1) Racine carrée et multiplication

Propriété 2. Soient a et b deux nombres positifs. Alors, la racine carrée du produit est égal au produit des racines carrées :

$$(P_4) : \sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$

Exemple. : $\sqrt{8}\times\sqrt{2}=\sqrt{8\times2}=\sqrt{16}=4$. On dit que « ***la racine carrée est compatible*** (c'est-à-dire qui se marie bien) ***avec la multiplication*** ».
« *La racine carrée du produit est égale au produit des racines carrées* ».

3.2) Racine carrée et quotient

Propriété 3. Soient a et b deux nombres positifs, $b\neq0$. Alors, la racine carrée du quotient est égal au quotient des racines carrées :

$$(P_5) : \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemple. $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{27}{48}}=\sqrt{\frac{9\times3}{16\times3}}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$.

On dit que « ***la racine carrée est compatible avec la division*** ».

« *La racine carrée du quotient est égale au quotient des racines carrées* ».

3.3) Racine carrée et addition

Propriété 4. Soient a et b deux nombres positifs non nuls. Alors, en général, la somme des deux racines carrées n'est pas égale à la racine carrée de la somme :

$$(P_6) : \quad \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Exemple. $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4+3 = 7$. Donc, on a bien : $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$.

On dit que « ***la racine carrée est n'est pas compatible avec l'addition*** ».

3.4) Racine carrée et soustraction

Propriété 5. Soient a et b deux nombres positifs non nuls, $a > b$. Alors, en général, la différence des deux racines carrées n'est pas égale à la racine carrée de la différence :

$$(P_7) : \quad \sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Exemple. $\sqrt{16-9} = \sqrt{7}$ et $\sqrt{16} - \sqrt{9} = 4-3 = 1$. Donc, on a bien : $\sqrt{16-9} \neq \sqrt{16} - \sqrt{9}$.

On dit que « ***la racine carrée est n'est pas compatible avec la soustraction*** ».

3.5) Simplification des racines carrées

Simplifier la racine carrée $\sqrt{8}$ revient à l'écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, où le nombre b sous le radical est le plus petit possible ! Par exemple :

$$\begin{aligned} \sqrt{18} &= \sqrt{9 \times 2} \\ &= \sqrt{9} \times \sqrt{2} \\ &= 3 \times \sqrt{2} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\sqrt{18} = 3\sqrt{2}}$

Comme vous le voyez, nous allons utiliser les nombres *entiers carrés parfaits* et les *propriétés des racines carrées*. On va donc en rajouter une à partir de (P_3) et (P_4) :

Propriété de simplification des racine carrées 6. Soient k et a deux nombres positifs. Alors :

$$(P_8) : \quad \sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}$$

En effet :

$$\begin{aligned} \sqrt{k^2 a} &= \sqrt{k^2} \times \sqrt{a} && \text{d'après la propriété } (P_3) \\ &= k \times \sqrt{a} && \text{d'après la propriété } (P_4) \end{aligned}$$

Donc, on a bien : $\boxed{\sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}}$

Exemples.

$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

IV. Règles de calculs

<u>Propriété 7</u>. Les règles de calculs sur les racines carrées sont les mêmes que les règles appliquées aux nombres décimaux, aux fractions et au calcul littéral.

<u>Exemples</u>. Calculs avec les racines carrées.

$A = 5\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ On met $\sqrt{2}$ en facteur

$A = (5+3)\sqrt{2}$ On additionne

$\boxed{A=8\sqrt{2}}$ J'encadre mon résultat.

$B = 5\sqrt{2}\times 3\sqrt{3}$ On multiplie les nombres entre eux

$B = 5\times 3\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ et les racines carrées entre elles.

$B = 15\times\sqrt{2\times 3}$ On utilise la propriété (P_3).

$\boxed{B=15\sqrt{6}}$ J'encadre mon résultat.

$C = (3\sqrt{2}-4)(5\sqrt{2}+3)$ On développe naturellement en

$C = 3\sqrt{2}\times 5\sqrt{2}+3\sqrt{2}\times 3-4\times 5\sqrt{2}-4\times 3$ respectant les propriétés.

$C = 3\times 5\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}+3\times 3\sqrt{2}-4\times 5\sqrt{2}-4\times 3$ On calcule $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ (P_{2bis})

$C = 15\times 2+9\sqrt{2}-20\sqrt{2}-12$ On utilise la distributivité

$C = 30-12+(9-20)\sqrt{2}$ On regroupe les entiers entre eux

$\boxed{C=18-11\sqrt{2}}$ et les racines entre elles.

J'encadre mon résultat.

Réduire une somme avec des racines carrées (Brevet des collèges)

Écrire l'expression D et E sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers avec b le plus petit possible.

Ici, on utilise toutes les propriétés en commençant par simplifier les racines carrées.

$D = 5\sqrt{32}+2\sqrt{18}-\sqrt{50}$ On décompose les nombres sous

$D = 5\sqrt{16\times 2}+2\sqrt{9\times 2}-\sqrt{25\times 2}$ le radical à l'aide de carrés entiers et

$D = 5\times\sqrt{16}\times\sqrt{2}+2\times\sqrt{9}\times\sqrt{2}-\sqrt{25}\times\sqrt{2}$ faire apparaître un facteur commun 2

$D = 5\times 4\times\sqrt{2}+2\times 3\times\sqrt{2}-5\times\sqrt{2}$

$D = 20\sqrt{2}+6\sqrt{2}-5\sqrt{2}$ On met 2 en facteur

$D = (20+6-5)\sqrt{2}$

$\boxed{D=21\sqrt{2}}$ J'encadre mon résultat.

$E = \sqrt{21}\times\sqrt{14}\times\sqrt{18}$ On utilsie la propriété (P_3)

$E = \sqrt{21\times 14\times 18}$ On décompose ces nombres en plusieurs facteurs

$E = \sqrt{7\times 3\times 7\times 2\times 9\times 2}$ On regroupe les facteurs doubles

$E = \sqrt{7\times 7\times 3\times 2\times 2\times 9}$ On utilsie la propriété (P_2) et (P_{2bis})

$E = \sqrt{7\times 7}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2\times 2}\sqrt{9}$

$E = 7\times 2\times 3\times\sqrt{3}$ D'où $\boxed{E=42\sqrt{3}}$ J'encadre mon résultat.

V. Résolution des équations « $x^2 = a$ »

Propriété 8. On distingue trois cas possibles. Soit a un nombre positif donné. Alors

- Si $a < 0$, alors l'équation $x^2=a$ n'admet aucune solution.
  Donc l'***ensemble des solutions est vide***. On note : **S = ∅**.
- Si $a = 0$, alors l'équation $x^2=0$ admet une seule solution : le nombre 0.
  Donc l'***ensemble des solutions contient un seul nombre* 0**. **S = { 0 }**.
- Si $a > 0$, alors l'équation $x^2=a$ admet deux solutions : l'une positive : a et l'autre négative : – a . Donc l'***ensemble des solutions contient deux nombres opposés*** $\sqrt{a}$ ***et*** $-\sqrt{a}$. **S = {** $-\sqrt{a}\,;\sqrt{a}$ **}**.

Exemples.

Résoudre les équations suivantes :

(1) $x^2-7=0$;
(2) $x^2+5=0$;
(3) $x^2=0$.

1°) l'équation $x^2-7=0$ est équivalente à $x^2=7$. Comme 7 > 0, l'équation (1) admet deux solutions $-\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$. Donc

$$S_1=\{-\sqrt{7};\sqrt{7}\}$$

2°) l'équation $x^2+5=0$ est équivalente à $x^2=-5$. Comme – 5 < 0, l'équation (2) n'admet aucune solution puisqu'un carré n'est jamais négatif. Donc :

$$S_2=\emptyset$$

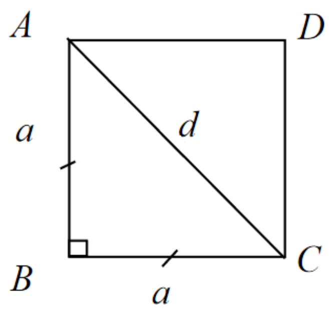
3°) l'équation $x^2=0$ admet une seule solution : le nombre 0. Donc :

$$S_3=\{0\}$$

VI. Applications en géométrie

Exemple 1. ***Calcul de la diagonale d'un carré***

ABCD est un carré de côté a et de diagonale d. Exprimer la diagonale d en fonction de a. *On fait d'abord un schéma.*



ABC est un triangle rectangle en B. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$d^2 = a^2 + a^2$$
$$d^2 = 2a^2$$

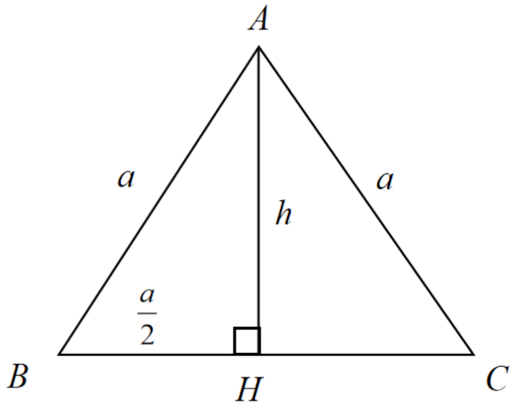
Donc :

$$d = \sqrt{2a^2}$$
$$d = \sqrt{2}\sqrt{a^2}$$
$$\boxed{d = a\sqrt{2}}$$

<u>Conclusion</u>. Dans un carré quelconque de côté *a*, la longueur de la diagonale est toujours égale à $d = a\sqrt{2}$. (*A refaire et à apprendre par coeur* !)

<u>Exemple 2</u>. ***Calcul de la hauteur d'un triangle équilatéral***

ABC est un triangle équilatéral de côté *a* et de hauteur *h*. Exprimer la hauteur *h* en fonction de *a*. *On fait d'abord un schéma.*



ABH est un triangle rectangle en H. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

Donc : $$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Donc : $$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Donc : $$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{2^2}$$

Donc : $$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

Donc : $$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

Donc : $$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

Et après simplification, on obtient :

$$\boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

<u>Conclusion</u>. Dans un triangle équilatéral quelconque de côté *a*, la longueur de la hauteur est toujours égale à $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (*A refaire et à apprendre par coeur* !)