Arithmétique
Étude des nombres entiers
Calcul du PGCD

Ce que dit le programme 2008

CONNAISSANCES	CAPACITÉS	COMMENTAIRES
Nombres entiers et rationnels **Diviseurs communs à deux entiers, PGCD.**	- Connaître et utiliser un algorithme donnant le PGCD de deux entiers (algorithme des soustractions, algorithme d'Euclide). - Calculer le PGCD de deux entiers. - Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux.	Plusieurs méthodes peuvent être envisagées. La connaissance de relations arithmétiques entre nombres – que la pratique du calcul mental a permis de développer – permet d'identifier des diviseurs communs de deux entiers. Le recours à une décomposition en produits de facteurs premiers est possible dans des cas simples mais ne doit pas être systématisée. Les tableurs, calculatrices et logiciels de calcul formel sont exploités.
Fractions irréductibles. **Opérations sur les nombres relatifs en écriture fractionnaire.** **[Reprise du programme du cycle central]**	- Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.	Dans le cadre du socle commun, les élèves utilisent leur calculatrice pour rendre irréductible une fraction donnée. Dans le cadre du socle commun, l'addition, la soustraction et la multiplication « à la main » de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire, sont exigibles seulement dans des cas simples ; pour l'addition et la soustraction, il s'agit uniquement des cas où un calcul mental est possible. Dans les autres cas, la calculatrice est utilisée.

I. Multiples et diviseurs

1.1) Définitions

Définition : Soient a et b deux nombres entiers relatifs.
On dit que ***b* divise *a*** et on note ***b* | *a*** si, et seulement si,

$$\boxed{\text{Il existe un entier relatif } k \text{ tel que : } a = k \times b}$$

On dit aussi que ***b est un diviseur de a*** ou que ***a est divisible par b*** ou encore que ***a est un multiple de b***.

Exemples :

- 4 est un diviseur de 24, car il existe un entier $k=6$ tel que $24=6\times4$.
- Tous les entiers relatifs non nuls sont des diviseurs de 0.
- 0 est un multiple de tous les entiers relatifs.
  [Vous remarquerez une petite nuance avec le point précédent.]
- Tous les entiers relatifs sont des divisibles par 1 et –1.

1.2) Premières propriétés

Premières propriétés. : On a les propriétés suivantes :

P_1 : Pour tout entier relatif *a,* non nul : [***a* divise *a***].

P_2 : Pour tous entiers *a* et *b,* non nuls :

[Si ***a* divise *b*** et ***b* divise *a***, alors ***a* = *b*** ou ***a* = – *b***].

P_3 : Pour tous entiers *a* et *b,* non nuls :

[*Si* ***a* divise *b****, alors* pour tout entier relatif ***k*** *:* ***a divise kb***].

Autrement dit *: Si* ***a* divise *b****, alors* ***a divise tout multiple de b****.*

1.3) Ensemble de diviseurs d'un entier naturel

Propriété P_4 : Soit *n* un entier naturel non nul. Alors

1°) Tout diviseur positif *d* de *n* est un entier compris entre 1 et *n*.

2°) Tout entier naturel non nul *n* admet un nombre fini de diviseurs.

Exemple : Pour déterminer l'ensemble des diviseurs de 36, ***on teste la divisibilité*** de 36 par chacun des nombres entiers *d* compris entre 1 et 36 compris. [On pourra s'arrêter plus tôt].

$36 = 1\times 36$

$= 2\times 18$ (à chaque petit diviseur correspond un grand)

$= 3\times 12$ (le point d'«***équilibre***» est 6 qui correspond à $\sqrt{36}$.)

$= 4\times 9$

$= 6\times 6$

Par suite, 36 admet neuf diviseurs (on voit verticalement les petits diviseurs à gauche et les grands à droite). La liste des diviseurs positifs de 36 est :

$L_{36} = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$

On met des accolades et on sépare les nombres par des points-virgules.

1.5) Transitivité de la divisibilité

Propriété P_5 :

P_5 : 2°) Pour tous entiers relatifs *a,b* et *c,* non nuls, on a :

[Si *b* est un multiple de *a* et *c* est un multiple de *b*, alors *c* est un multiple de *a*].

P_{5bis} : 2°) Pour tous entiers relatifs *a,b* et *c,* non nuls, on a :

[Si ***a divise b*** et ***b* divise *c***, alors ***a* divise *c***].

1.6) Somme et différence de deux multiples

Propriété n°7 et définition.

P_6 : 1°) La somme et la différence de deux multiples d'un nombre entier *a* sont encore un multiple de *a*.

[Si ***b* et *c*** *sont des multiples de* ***a***, alors ***b* + *c*** et ***b* – *c*** sont aussi des multiples de ***a***].

P_{6bis} : 2°) Pour tous entiers *a, b* et *c,* non nuls :

[Si ***a* divise *b*** et ***a* divise *c***, alors ***a* divise *b*+*c*** et ***a* divise *b* – *c***].

Exemple
3 divise 9 et 3 divise 15, donc 3 divise $9k+15k'$. En effet : $9k+15k' = 3(3k+5k')$.

II. Division euclidienne

2.1) Rappel : Partie entière d'un nombre réel

Soit x un nombre réel. Alors, il existe un unique entier n tel que x soit compris entre n (inclus) et $n+1$ (exclu). Autrement dit :

Pour tout nombre réel x, il existe un unique entier n tel que : $n \leqslant x < n+1$

On dit que « ***n* est la partie entière de *x*** » et on note : ***E*(*x*) = *n*.** Alors, pour tout nombre réel *x*, on a :

$$E(x) \leqslant x < E(x)+1.$$

Exemples $E(2{,}15)=2\,;\, E(\pi)=3\,;\, E\left(\frac{8}{3}\right)=2\,;\, E(-2)=-2$

et $E(-2{,}5)=-3$ (à vérifier).

2.2) La division euclidienne

Théorème 1. Soient a et b deux nombres entiers naturels, b étant non nul.
Alors, **il existe un couple *unique*** d'entiers $(q\,;\,r)$ tel que :

$$\boldsymbol{a = bq + r}, \text{ avec } \boldsymbol{0 \leq r < b}$$

L'entier q est égal à la partie entière du quotient (exact) de a par b. Autrement dit :

$$q = E\left(\frac{a}{b}\right) \quad \text{et} \quad r = a - bq$$

Définition. Dans l'écriture de la division euclidienne de a par b, ***a*** est ***le dividende***, ***b*** est ***le diviseur***, l'entier ***q*** s'appelle ***le quotient entier*** et ***r le reste*** de la division euclidienne de a par b.

Exemples
1°) La division euclidienne de 38 par 7 s'écrit en ligne : $38=7\times5+3$.
5 est ***le quotient entier*** de 38 par 7 et 3 est ***le reste*** de la division euclidienne de 36 par 7. Ici on a bien : $r=3$ et $0 \leqslant r < 7$.

2°) L'écriture $38=7\times4+10$ est une égalité vraie, mais ne correspond pas à une division euclidienne, car le reste n'est pas strictement plus petit que le diviseur.

III. Nombres premiers

3.1) Définitions

Définition 1. Un nombre entier naturel p, supérieur ou égal à 2 est dit ***premier*** lorsqu'il n'admet pas d'autres diviseurs positifs que 1 et lui-même.

Autrement dit : Un nombre entier naturel p, supérieur ou égal à 2 est dit ***premier*** lorsqu'il admet ***exactement deux diviseurs positifs, 1 et lui-même.***

Cette définition exclut le nombre 1 ; donc ***1 n'est pas un nombre premier*** car 1 admet exactement ***un seul diviseur*** : 1 qui n'est autre que lui-même.

Définition 2. Un nombre entier naturel n, distinct de 1, qui n'est pas premier est dit ***composé***.

Exemple 1. 2; 3; 5; 7; 11 sont des nombres *premiers*. 6 est un nombre *composé*.

3.2) Comment déterminer si un entier est premier ?

1°) Une première technique consiste à utiliser un algorithme ou un programme sur calculatrice ou un ordinateur. Pour chaque entier N saisi, on crée une boucle qui teste la divisibilité de N par tous les entiers non nuls qui le précèdent.

Pour cela il suffit « pour (tous les entiers) k allant de 1 à N », de calculer N/k, et de vérifier si le quotient N/k est entier, c'est-à-dire « si $N/k = E(N/k)$ » où E désigne la ***partie entière d'un nombre réel***. Cette fonction existe sur toutes les calculatrices programmables ! *A vous de jouer.*

2°) Nous connaissons une méthode, vielle de plusieurs siècles, appelée ***méthode des cribles***, pour déterminer ***tous*** les nombres premiers compris entre 1 et un entier naturel N quelconque, donné.

Exemple : Comment déterminer tous les nombres premiers compris entre 1 et 100 ?

Le crible d'Eratosthène [*Mathématicien grec 284-192 avant J.C.]*
Cette méthode permet de déterminer la liste de tous les nombres premiers inférieurs à un nombre entier donné N. Cette méthode se base sur la propriété suivante fondamentale suivante :

Propriété 1. *Pour tout entier naturel p, les multiples de p, strictement supérieurs à cet entier, ne sont pas premiers*

<u>Démonstration</u>. Soit p un entier naturel et n un multiple strict de p. Par définition, il existe un entier k tel que $n = kp$, avec $k > 1$. Alors n admet au moins 4 diviseurs : 1, k, p et n. Donc n n'est pas premier. CQFD.

<u>Méthode du crible d'Eratosthène :</u>
On construit un tableau comportant les entiers compris entre 2 et N. **<u>On conserve</u>** *chaque <u>premier nombre</u> rencontré* **<u>et on raye</u>** tous ses ses multiples stricts dans l'ordre croissant. Les nombres entiers non rayés sont donc ***premiers***.

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	**67**	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Par conséquent ; la liste des nombres premiers inférieurs à 100 est :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 et 97.

IV. Plus grand diviseur commun (PGCD)

4.1) Définitions

<u>Définition.</u>
Soient a et b deux nombres entiers naturels et d un entier naturel non nul. On dit que d est ***un diviseur commun*** à a et b si d est un diviseur de chacun de ces deux nombres.

<u>Exemple</u>

3 est ***diviseur commun*** à 18 et 24.

<u>Définition.</u>
Soient a, b et d trois nombres entiers naturels non nuls. On dit que d est ***le plus grand diviseur commun à a et b*** si et seulement si d est ***un diviseur commun*** à a et b et que d est ***le plus grand*** des diviseurs communs. On note :

$$d = PGCD(a\ ;\ b) \quad \text{ou} \quad d = pgcd(a\ ;\ b)$$

Exemple

3 est un diviseur commun à 18 et 24. Mais 3 n'est pas le PGCD de 18 et 24, car 6 est aussi un diviseur commun à 18 et 24 et 6 > 3. Par contre, 6 est le PGCD de 18 et 24.
On écrit : 6 = PGCD(18;24)

4.2) Calcul du et PGCD : *Méthode des listes des diviseurs*

Propriété. Première méthode : ***Les listes des diviseurs***
Soient a et b deux nombres entiers naturels non nuls. On note L_a et L_b les listes des diviseurs de a et b respectivement et L_c la liste des diviseurs communs à a et b. Alors le PGCD de a et b est égal au plus grand élément de L_c.

Exemple
Recherchons le PGCD de 18 et 24.

On cherche d'abord les listes des diviseurs de respectives de 18 et 24.

$$\begin{aligned} 18 &= 1\times 18 \\ &= 2\times 9 \\ &= 3\times 6 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} 24 &= 1\times 24 \\ &= 2\times 12 \\ &= 3\times 8 \\ &= 4\times 6 \end{aligned}$$

La liste des diviseurs positifs de 18 est :

$$L_{18} = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$$

La liste des diviseurs positifs de 24 est :

$$L_{24} = \{1; 2; 3; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24\}$$

La liste des diviseurs communs à 18 et 24 est :

$$L_c = \{1; 2; 3; 6\}$$

Le plus grand élément de cette liste est bien 6. Donc : $\boxed{\text{Pgcd}(18;24)=6}$

Remarque

C'est une méthode qui paraît simple, avec de petits nombres ; mais elle deviendra fastidieuse pour de grand nombre.

Propriété : conséquence immédiate
Soient a et b deux nombres entiers naturels non nuls. Si ***a* est un multiple de *b***, alors le PGCD de a et b est égal à b.

$$\boxed{\text{Pgcd}(a;b)=b}$$

En effet,
Si on suppose que a est un multiple de b, alors b est un diviseur de a.
Or, on sait que b est un multiple de b, donc b est un diviseur de b et c'est le plus grand parmi les diviseurs de b. Ainsi b est un diviseur commun à a et b et c'est le plus grand des diviseurs communs à a et b. D'où le résultat.

4.3) Calcul du et PGCD : ***Méthodes des soustractions successives***

Propriété
Soient a et b deux nombres entiers naturels non nuls. On suppose que a > b. Alors

$$\boxed{\text{Pgcd}(a\,;b)=Pgcd(a\,;a-b)}$$

Cette propriété permet de réduire la recherche à des nombres plus petits. Si on recommence le procédé, on devrait y arriver. A quel moment faudra-t-il s'arrêter ?

Exemple

PGCD(18;24) = PGCD(18; 24 –18)
= PGCD(18;6)
= PGCD(18;18 – 6)
= PGCD(18 ; 12)
= PGCD(12;18 –12)
= PGCD(12 ; 6) On peut s'arrêter ici car 12 est un multiple de 6 → d = 6.
= PGCD(6;12 – 6)
= PGCD(6 ; 6) On pourrait s'arrêter ici, car PGCD(a;a) = a → d = 6.
= PGCD(6 ; 6 – 6)
= PGCD(6 ; 0) On s'arrête ici, lorsqu'on obtient une différence est nulle

Le PGCD est alors égal à la dernière différence non nulle dans ces « soustractions successives ». On obtient ainsi notre deuxième méthode de calcul du PGCD.

Propriété. Deuxième méthode : ***La méthode des différences successives***
Soient a et b deux nombres entiers naturels non nuls. On suppose que $\boldsymbol{a > b}$. Alors :
– Si a est un multiple de b, alors PGCD(a ; b) = b.
– Sinon, on calcule les différences successives de la manières suivante :

$$a \;-b=c$$

On barre a, puis on remplace a par le plus grand des deux nombres b ou c. On recommence le procédé jusqu'à obtenir une ***différence nulle***. Alors ***le PGCD est égal à la dernière différence non nulle*** dans la suite des soustractions successives entre a et b.

Exemple
Recherchons le PGCD de 18 et 24. On a bien : 24 > 18. On calcule les différences successives de 24 et 18 comme suit :

~~24~~ – 18 = 6
~~18~~ – 6 = 12
~~12~~ – 6 = 6 La dernière différence ***non nulle***. Donc PGCD(18;24) = 6 .
6 – 6 = 0 La dernière différence ***nulle***.

Remarques

1. Cette méthode est construite sous la forme d'un algorithme. On peut donc écrire un programme sur calculatrice ou un logiciel de programmation.
2. Un petit problème : le nombre d'opérations nécessaires pour exécuter cette méthode à la main ou dans un programme deviendra fastidieux pour certains couples de nombres. Essayez de calculer le PGCD de 1792 et 48 avec cette méthode. Il faudra soustraire 48 au moins 36 fois avant de commencer à voire poindre la solution.

4.4) Calcul du et PGCD : *Méthodes des divisions euclidiennes successives ou Algorithme d'Euclide*

Propriété
Soient a et b deux nombres entiers naturels non nuls. On suppose que a > b. Alors, si on effectue ***la division euclidienne*** de a par b, il existe un couple *unique* d'entiers $(q\,;\,r)$ tel que : $\boldsymbol{a = bq + r}$, avec $\boldsymbol{0 \leq r < b}$. Alors

$$\boxed{\text{Pgcd}(a\,;b) = Pgcd(b\,;r)}$$

Cette propriété permet de réduire — plus vite — la recherche du PGCD à des nombres plus petits. Si on recommence le procédé, on devrait y arriver. A quel moment faudra-t-il s'arrêter ?

Exemple Calcul du PGCD(18;24)

24	18
6	1

Donc $24 = 18 \times 1 + 6$
On barre le 24 et le 1 et on recommence avec 18 et 6
Ici, ***le dernier reste non nul est égal à 6*** → PGCD(18;24) = 6.

18	6
0	3

Donc $18 = 6 \times 3 + 0$ Ici ***le dernier reste nul***.
18 est un multiple de 6

Conclusion. PGCD(18;24) = 6.

Propriété. Troisième méthode : Algorithme d'Euclide ou la méthode des divisions euclidiennes successives
Soient a et b deux nombres entiers naturels non nuls. On suppose que $\boldsymbol{a > b}$. Alors :
– Si a est un multiple de b, alors PGCD(a ; b) = b. ($r = 0$)
– Sinon, on calcule les divisions euclidiennes successives de la manières suivante :

$$a = bq + r$$

On remplace a par b et b par r. On recommence le procédé jusqu'à obtenir un ***reste nul***. Alors ***le PGCD est égal au dernier reste non nul*** dans la suite des divisions euclidiennes successives de a par b.

Exemple
Recherchons le PGCD de 1792 et 48. On a bien : 1792 > 48. On calcule les divisions euclidiennes successives de 1920 par 48 comme suit :

1792	48
16	37

Donc 1792 = 48 × 37 + 16
Ici ***le dernier reste non nul*** = 16

48	16
0	3

Donc 48 = 16 × 3 + 0
48 est un multiple de 16. Ici ***le reste nul***.

On pourrait présenter la résolution dans un tableau comme suit :

Nombre 1	Nombre 2	Quotient	Reste
1792	48	37	16
48	16	3	0

Le PGCD étant égal au dernier reste non nul dans la suite des divisions euclidiennes successives de 1792 par 48, on obtient :

Conclusion. PGCD(1792 ; 48) = 16.

Remarques

1. Cette méthode est également construite sous la forme d'un algorithme. On peut donc écrire un programme sur calculatrice ou un logiciel de programmation.
2. Contrairement aux méthodes précédentes, dans cette méthode, le nombre d'opérations nécessaires pour exécuter l'algorithme d'Euclide à la main ou dans un programme est minimal et par suite, c'est LA méthode que nous trouvons implémentée dans toutes les machines pour le calcul du PGCD.

V. Nombres premiers entre eux

5.1) Définition

Définition.
Deux nombres entiers sont dits premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun positif est 1.
Autrement dit : Soient a et b deux nombres entiers naturels non nuls. Alors
[a et b sont premiers entre eux si et seulement si PGCD(a ; b) = 1].

Exemple

24 et 35 sont premiers entre eux. En effet les listes de diviseurs de ces deux nombres sont : L_{24} = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24} et L_{35} = { 1 ; 5 ; 7 ; 35}.
La liste de leurs diviseurs communs est : L_c = { 1 }. Donc PGCD (24 ; 35) = 1.

VI. Fraction irréductible

6.1) Définition et propriétés

Définition.
Une ***fraction irréductible*** ou ***fraction simple***, est une fraction simplifiée le plus possible.

Propriété
Soient a et b deux nombres entiers naturels non nuls. Alors :

1°) Si la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible, alors a et b sont premiers entre eux ;

2°) Si a et b sont premiers entre eux, alors la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible.

Exemple. 24 et 35 sont entiers premiers entre eux, donc $\frac{24}{35}$ est irréductible.

6.2) Application du PGCD : Simplification des fractions

Pour simplifier une fraction ou un nombre en écriture fractionnaire, on sait qu'il faut multiplier ou diviser par un même nombre le numérateur et le dénominateur de cette fraction. Pour simplifier « au maximum » une fraction, il faut et il suffit de disviser le numérateur et le dénominateur par le PGCD des deux nombres.

Exemple : Trouver la fraction irréductible égale à $\frac{18}{24}$

On pourrait simplifier par 2 : $\frac{18}{24}=\frac{2\times 9}{2\times 12}=\frac{9}{12}$ n'est pas une fraction irréductible.

ou par 3 : $\frac{18}{24}=\frac{3\times 6}{3\times 8}=\frac{6}{8}$ n'est pas une fraction irréductible.

Par contre PGCD(18;24) = 6. Donc, on a bien :

$$\frac{18}{24}=\frac{6\times 3}{6\times 4}=\frac{3}{4}$$ est une fraction irréductible.

On pourrait aussi écrire : $\frac{18}{24}=\frac{18\div 6}{24\div 6}=\frac{3}{4}$

6.3) Exemple: Brevet des collèges 2005.

1°) Calculer le PGCD des nombres 135 et 210 .

2°) Dans une salle de bains, on veut recouvrir le mur situé au dessus de la baignoire avec un nombre entier de carreaux de faïence de forme carrée dont le côté est un nombre entier de centimètres le plus grand possible.

a) Déterminer la longueur, en cm, du côté d'un carreau, sachant que le mur mesure 210 cm de hauteur et 135 cm de largeur.

b) Combien faudra-t-il alors de carreaux ?