Géométrie dans l'espace
Produit scalaire et équations

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
2ème partie ✓ **Produit scalaire** Produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace : définition, propriétés. Vecteur normal à un plan. Équation cartésienne d'un plan.	Déterminer si un vecteur est normal à un plan. Caractériser les points d'un plan de l'espace par une relation $ax + by + cz + d = 0$ avec a , b , c trois nombres réels non tous nuls. Déterminer une équation cartésienne d'un plan connaissant un point et un vecteur normal. Déterminer un vecteur normal à un plan défini par une équation cartésienne. Démontrer qu'une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. Choisir la forme la plus adaptée entre équation cartésienne et représentation paramétrique pour : - déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan ; - étudier la position relative de deux plans	On étend aux vecteurs de l'espace la définition du produit scalaire donnée dans le plan. On caractérise vectoriellement l'orthogonalité de deux droites et on introduit la notion de plans perpendiculaires.

IV. Produit scalaire dans l'espace

Dans ce paragraphe, nous supposons que l'espace est muni d'un un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
La notion de produit scalaire vues dans le plan en 1ère S s'étend naturellement au cas de deux vecteurs dans l'espace en conservant exactement les mêmes propriétés, géométriques et algébriques.
Il ya essentiellement **quatre manières** de définir le produit scalaire de deux vecteurs.

- A l'aide des normes et de l'angle des deux vecteurs ;
- A l'aide des normes uniquement ;
- A l'aide de la projection orthogonale de l'un des vecteurs sur la direction de l'autre ;
- A l'aide des coordonnées dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

4.1) Produit scalaire et normes

Définition 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \qquad \textbf{(Déf.1)}$$

où $(\vec{u}, \vec{v})$ désigne l'angle orienté des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Conséquences immédiates :

(PS$_1$) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (le cosinus étant une fonction paire.)

(PS$_2$) $\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ (en effet l'angle $(\vec{u}, \vec{v}) = \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$)

(PS$_3$) $\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$, on note alors $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$

(PS$_4$) Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ alors $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$

(PS$_5$) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de même sens : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ [$(\vec{u},\vec{v})=0$]

(PS$_{5bis}$) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de sens contraires : $\vec{u}.\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ [$(\vec{u},\vec{v})=\pi$].

Propriétés algébriques

Soient $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et α un réel. Alors :

(PS$_1$) $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ (commutativité)

(PS$_6$) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ (distributivité du p.s. par rapport à l'addition)

(PS$_7$) $\vec{u}.(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}.\vec{v})=(\alpha\vec{u}).\vec{v}$

Identités remarquables

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans l'espace. Alors :

(I.R.n°1) $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$ on rappelle que $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$.

(I.R.n°2) $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

(I.R.n°3) $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

Démonstration

(I.R.n°1) : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, alors : $(\vec{u}+\vec{v})^2=(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})$,
et par distributivité, on a : $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}.\vec{u}+\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}$
et par commutativité du p.s., on a : $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$ CQFD
Même technique pour les 2 autres I.R.

Définition 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel défini par : $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ **(Déf.2)**

Démonstration

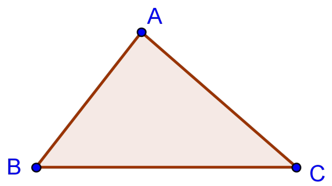
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Donc, d'après l'I.R.n°2, on a :
$(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$, donc $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$. Par suite, on a :
$2\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$. Ce qui donne : $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ CQFD

Exemple

Soit ABC un triangle tel que $AB=4, AC=5$ et $BC=6$ (l'unité est $OI=OJ=OK$ dans le repère orthonormé direct.)

i) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
ii) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ arrondie au degré près.

i) On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ alors $\|\vec{u}\|=4$ et $\|\vec{v}\|=5$
Alors, d'après la relation de Chasles :
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{v}-\vec{u}$. Donc $\|\vec{u}-\vec{v}\|=6$.
D'après la définition 2 du p.s., on a :



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{BC}\|^2\right)$$ **(Déf 2')**

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(4^2+5^2-6^2)=\frac{5}{2}$. Par suite : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{5}{2}$.

ii) On sait que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

En utilisant le résultat précédent, on obtient : $\frac{5}{2}=4\times5\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

Donc, après simplification, on obtient : $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{1}{8}$.

A la calculatrice, on obtient : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)=82{,}8192...$

<u>**Conclusion**</u> : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\approx\ 83°$.

<u>Théorème d'AlKashi</u>

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit ABC un triangle quelconque. On pose AB = *c*, AC = *b* et BC = *a* ou *a,b* et *c* sont des nombres réels positifs. Alors :
(AK_1) : $c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\hat{A})$ où $\hat{A}=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$
(AK_2) : $b^2=a^2+c^2-2ac\cos(\hat{B})$ où $\hat{B}=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$
(AK_3) : $c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\hat{C})$ où $\hat{A}=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

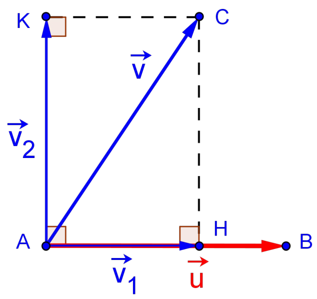
La démonstration est analogue au calcul de l'exemple précédent.

4.2) Produit scalaire et projection orthogonale

<u>Théorème et définition 3</u>

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soit *A, B* et *C* trois points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. Soit *H* le projeté orthogonal de *C* sur la direction (*AB*) et *K* le projeté orthogonal de *C* sur la direction ortogonale à (*AB*). Alors : $\vec{v_1}=\overrightarrow{AH}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la direction de $\vec{u}$ et :

$$\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{v_1}$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$$ **(Déf.3)**



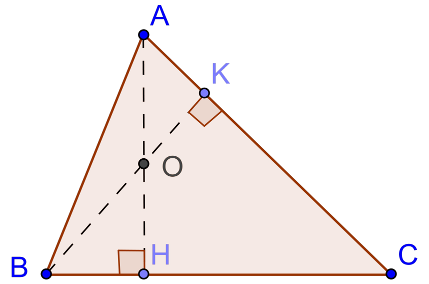
<u>Démonstration</u>

On décompose le vecteur $\vec{v}$ suivant la direction de $\vec{u}$ et la direction orthogonale à $\vec{u}$ de sorte que : $\vec{v}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$. Mais alors : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.(\vec{v_1}+\vec{v_2})=\vec{u}.\vec{v_1}+\vec{u}.\vec{v_2}$. Donc $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{v_1}+0=\vec{u}.\vec{v_1}$ car les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v_1}$ sont orthogonaux, donc $\vec{u}.\vec{v_2}=0$.

<u>**Conclusion**</u> : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{v_1}$ CQFD

On pourrait aussi écrire : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u_1}.\vec{v}$ où $\vec{u_1}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$.

Exemple classique

Les trois hauteurs d'un triangle quelconque sont concourantes. *ABC* est un triangle quelconque. Soit *H* le pied de la hauteur issue de *A* et *K* le pied de la hauteur issue de *B*. Les hauteurs (*AH*) et (*BK*) se coupent en *O*. 1°) Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CO}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{OA}$ en fonction de *AC*. 2°) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC}$. (*Penser à décomposer astucieusement les vecteurs !*) 3°) En déduire que (CO) est la 3ème hauteur du triangle ABC. 4°) Conclure.	

4.3) Produit scalaire et coordonnées

Théorème et définition 4

L'espace est muni d'un ***repère orthonormé*** direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. Alors

$$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz' \qquad \textbf{(Déf.4)}$$

Démonstration

$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé

(ssi) $\begin{cases}\|\vec{i}\|=1, \|\vec{j}\|=1 \ et\ \|\vec{k}\|=1\\ \vec{i}\perp\vec{j},\ \vec{j}\perp\vec{k},\ et\ \vec{k}\perp\vec{i},\end{cases}$ (ssi) $\begin{cases}\vec{i}.\vec{i}=1,\ \vec{j}.\vec{j}=1\ et\ \vec{k}.\vec{k}=1\\ \vec{i}.\vec{j}=0,\ \vec{j}.\vec{k}=0\ et\ \vec{k}.\vec{i}=0\\ \vec{j}.\vec{i}=0,\ \vec{k}.\vec{j}=0\ et\ \vec{i}.\vec{k}=0\end{cases}$ (*)

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'écrivent dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \text{ et } \vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$$

Donc, par distributivité, on a :

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v}=&\,xx'\vec{i}\vec{i}+xy'\vec{i}\vec{j}+xz'\vec{i}\vec{k}\\ &+\ yx'\vec{j}\vec{i}+yy'\vec{j}\vec{j}+yz'\vec{j}\vec{k}\\ &+\ zx'\vec{k}\vec{i}+zy'\vec{k}\vec{j}+zz'\vec{k}\vec{k}\end{aligned}$$

Et d'après les relations (*), on a bien : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ CQFD.

Exemple

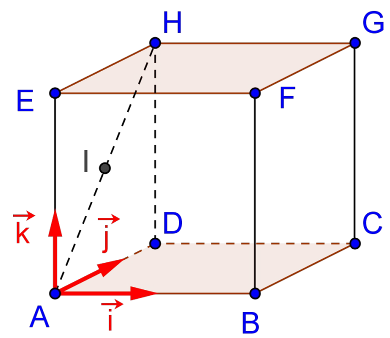
ABCDEFGH est un cube de côté $a>0$.

Démontrer que $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BI}$.

On place le cube dans un repère orthonormé $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tel que : $A=O$, $\overrightarrow{AB}=a\vec{i}$, $\overrightarrow{AD}=a\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE}=a\vec{k}$.

Alors, les coordonnées des points A, G, B et H sont :

$A(0;0;0), G(a;a;a), B(a;0;0)$ et $I\left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$



Mais alors, $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-a\\a/2\\a/2\end{pmatrix}$ et on a bien $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BI}=-a^2+\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$.

Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont orthogonaux.

V. Équations cartésiennes dans l'espace

5.1) Vecteur normal à un plan

Définition 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ est ***normal à un plan P*** si $\vec{n}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale au plan *P*.

Conséquence :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Un vecteur $\vec{n}$ est normal à un plan P (ssi) $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur du plan P.
(ssi) $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs (de base) non colinéaires du plan P.

Exemple :

Si vecteur $\vec{n}$ est normal à un plan *P*, alors tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est encore normal au plan *P*. C'est immédiat.

Propriétés

(P_{12}) Une droite est orthogonale à un plan (ssi) un vecteur directeur de la droite est colinéaire à un vecteur normal au plan.
(P_{12}) Deux plans sont parallèles (ssi) leurs vecteurs normaux sont colinéaires
(P_{13}) Deux plans sont orthogonaux (ssi) leurs vecteurs normaux sont orthogonaux

5.2) Équation cartésienne d'un plan

Propriété et définition 2 ***(avec un point et un vecteur normal)***

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point donné et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace. Alors, l'ensemble des points *M(x;y;z)* de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ est le plan *P* passant par *A* et de vecteur normal $\vec{n}$, ayant une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ (*).
Réciproquement, toute équation de la forme (*), avec *a*, *b* et *c* non tous nuls, définit un plan *P* de vecteur normal $\vec{n}$.

Démonstration :

Soit $M(x;y;z)$ un point quelconque de l'espace. Alors :

$M\in P$ (ssi) $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$
(ssi) $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

(ssi) $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$
(ssi) $ax+by+cz-ax_A-by_A-cz_A=0$
(ssi) $ax+by+cz+d=0$ en posant $d=-ax_A-by_A-cz_A$ = constante.

Ce qui est bien la forme demandée.

Réciproquement. Soit Q l'ensemble des points de l'espace vérifiant une équation de la forme (*). Comme $\vec{n}\neq\vec{0}$, au moins une des composantes *a, b* ou *c* n'est pas nul. Donc $a\neq 0$ ou $b\neq 0$ ou $c\neq 0$. Ces trois cas sont symétriques, on étudie le cas $a\neq 0$.

Si $a\neq 0$: Q contient au moins un point : $A(-d/a\,;0{,}0)$.

En effet, $a\times\left(-\frac{d}{a}\right)+b\times 0+c\times 0+d=d-d=0$. Donc A verifie l'équation (*).

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point quelconque de Q. Donc M vérifie l'équation (*). De plus $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+\frac{d}{a}\\ y\\ z\end{pmatrix}$. Mais alors : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=a\left(x+\frac{d}{a}\right)+bx+cz=ax+d+by+cz=0.$

Donc $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.

D'unz manière analogue, on démontre le même résultat dans le cas $b\neq 0$ ou $c\neq 0$.

Conclusion : Il existe au moins un point $A\in Q$ et pour tout point M de Q, les vecteurs et $\vec{n}$ sont orthogonaux. Donc Q est bien un plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. CQFD.

Exemples

Nous distinguons trois situations qui se ramènent toutes à la définition ci-dessus.

Exemple 1 : ***Méthode n°1*** : Soit $A(1\,;2\,;3)$ un point donné et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace. Déterminer une équation cartésienne du plan *P*.

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point quelconque de l'espace. Alors :

$M\in P$ (ssi) $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$
(ssi) $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$
(ssi) $1\times(x-1)+(-4)\times(y-2)+2\times(z-3)=0$
(ssi) $1x-4y+2z-1+8-6=0$ (en rouge, on voit les coordonnées de $\vec{n}$)
(ssi) $x-4y+2z+1=0$

Conclusion : Une équation cartésienne du plan *P* est : $x-4y+2z+1=0$

Exemple 2 : ***Méthode n°2***

Soit $A(1\,;2\,;3)$ un point donné et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace.

Déterminer une équation cartésienne du plan *P* dirigé par les 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1ère étape : Tout d'abord, il faut s'assurer que les deux vecteurs sont non colinéaires et définissent bien un plan.
Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires. Donc, il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.
Mais alors, en passant aux coordonnées, on obtient :

$$\begin{cases} 1=k\times 1 \\ -1=k\times 0 \\ 2=k\times 3 \end{cases} \text{ Ce qui donne } \begin{cases} k=1 \\ -1=0 \\ k=2/3 \end{cases}$$. Ce qui est impossible.

Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, ils définissent bien un plan.
2ème étape : On cherche un vecteur normal au plan *P*.
Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace. On sait que $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ dirigent *P*. Alors

$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan *P*
(ssi) $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs de base
(ssi) $\vec{n}\perp\vec{u}$ et $\vec{n}\perp\vec{v}$
(ssi) $\vec{n}.\vec{u}=0$ et $\vec{n}.\vec{v}=0$
(ssi) $\begin{cases} a-b+2c=0 \\ a+3c=0 \end{cases}$ (ssi) $\begin{cases} -3c-b+2c=0 \\ a=-3c \end{cases}$ (ssi) $\begin{cases} b=-c \\ a=-3c \\ c\in\mathbb{R} \end{cases}$

Comme il n'y avait aucune condition sur c, on a posé que $c\in\mathbb{R}$, ce qui signifie que c peut prendre n'importe quelle valeur.
Pour c = –1, on obtient un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ normal au plan *P*. Il suffit de remplacer !
3ème étape : On détermine une équation cartésienne du plan *P*.
Soit $M(x;y;z)$ un point quelconque de l'espace. Alors :
$M\in P$ (ssi) $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$
(ssi) $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$
(ssi) $3\times(x-1)+1\times(y-2)+(-1)\times(z-3)=0$
(ssi) $1x-4y+2z-1+8-6=0$ (en rouge, les coordonnées de $\vec{n}$)
(ssi) $3x+y-z-2=0$
Conclusion : Une équation cartésienne du plan *P* est : $3x+y-z-2=0$. CQFD

Exemple 3 : ***Méthode n°3***
Soit $A(1;2;3)$, $B(2;1;5)$ et $C(2;2;6)$ trois points donnés dans l'espace.
Déterminer une équation cartésienne du plan (*ABC*).

1ère étape : Tout d'abord, on vérifie que les trois points A, B et C ne sont pas alignés donc ils déterminent bien un plan !
Pour cela, il suffit de démontrer que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont bien non colinéaires. Je calcule donc les coordonnées de ces vecteurs et je constate que :
$\overrightarrow{AB}=\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont les deux vecteurs directeurs de l'exemple précedent.

2ème étape : On cherche un vecteur normal au plan *P* et on obtient : $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$

3ème étape : On détermine une équation cartésienne du plan *P* et on obtient :
$3x+y-z-2=0$.
Remarque. On vérifie bien que les points *A, B* et *C* appartiennent au plan (*ABC*).

VI. Applications

Dans ce paragraphe, nous supposons que l'espace est muni d'un un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Exemple 1

On considère le plan *P* d'équation $3x+y-z-2=0$ et la droite *D* de représentation paramétrique : $\begin{cases}x=3t+1\\y=2t-2\\z=-t+3\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Soit $M(x;y;z)$ un point quelconque de l'espace. Alors :
$M\in P\cap D$ (ssi) $M\in P$ et $M\in D$

(ssi) Il existe un réel t tel que $3x+y-z-2=0$ et $\begin{cases}x=3t+1\\y=2t-2\\z=-t+3\end{cases}$.

Il suffit de substituer les expressions de x, y et z en fonction de t dans l'équation du plan. On a alors :
$M\in P\cap D$ (ssi) Il existe un réel *t* tel que :

$$3(3t+1)+(2t-2)-(-t+3)-2=0 \quad \text{et} \quad \begin{cases}x=3t+1\\y=2t-2\\z=-t+3\end{cases}$$

(ssi) Il existe un réel *t* tel que $9t+3+2t-2+t-3-2=0$ et $\begin{cases}x=3t+1\\y=2t-2\\z=-t+3\end{cases}$

(ssi) Il existe un réel *t* tel que $12t-4=0$ et et $\begin{cases}x=3t+1\\y=2t-2\\z=-t+3\end{cases}$

(ssi) $t=\frac{1}{3}$ et $\begin{cases}x=2\\y=-4/3\\z=8/3\end{cases}$

Conclusion : La droite D et le plan P sont sécants et leur point d'intersection a pour coordonnées : $M(2;\frac{-4}{3};\frac{8}{3})$. CQFD