Les nombres complexes - 2

Ce que dit le programme :

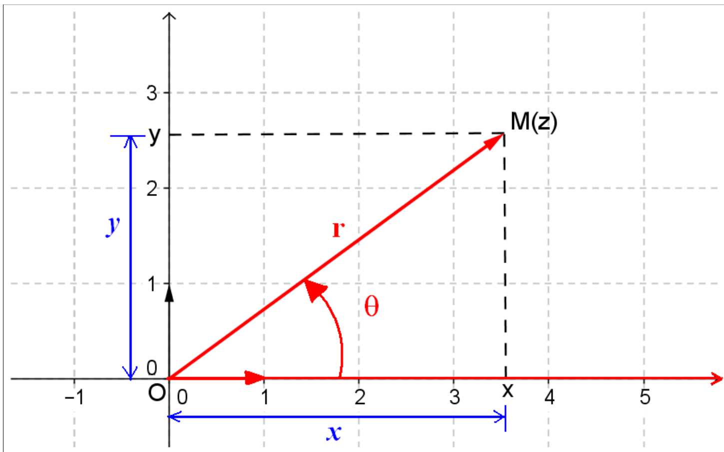
CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
1ère partie **Forme algébrique, conjugué.** Somme, produit, quotient. Équation du second degré à coefficients réels. **Représentation géométrique.** Affixe d'un point, d'un vecteur.	• Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes. • Résoudre dans **C** une équation du second degré à coefficients réels. • Représenter un nombre complexe par un point ou un vecteur. • Déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur.	On introduit dans ce chapitre des éléments lui donnant une dimension historique. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.
2ème partie ✓ **Forme trigonométrique :** - ***module et argument***, interprétation géométrique dans un repère orthonormé direct ; - ***notation exponentielle***.	• Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement. • Connaître et utiliser la relation $z\bar{z}=\lvert z\rvert^2$ • Effectuer des opérations sur les nombres complexes écrits sous différentes formes.	La notation exponentielle est introduite après avoir montré que la fonction $\theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$ vérifie la même relation fonctionnelle que la fonction exponentielle. Les nombres complexes permettent de mémoriser les formules trigonométriques d'addition et de duplication vues en première. [SI] Analyse fréquentielle d'un système.

I. Forme trigonométrique

1.1) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. On rappelle que le repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ est dit ***direct*** si et seulement si l'angle $(\vec{u};\vec{v})=+\frac{\pi}{2}$.

Nous avons vu en 1ère S, qu'à tout point M de coordonnées cartésiennes $(x\,;y)$ du plan, on associe les deux nombres réels : $r=\|\overrightarrow{OM}\|\in\mathbb{R}^+$ (norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$) et $\theta=(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ (modulo 2π) qui n'est autre que l'angle que forme le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec le vecteur de base $\vec{u}$ de direction $[Ox)$.



▶ *Si je connais les coordonnées cartésiennes (x;y), je peux calculer les coordonnées polaires :* ***r*** *et* θ *:*

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

▶ *Inversement, si je connais les coordonnées polaires* $(r;\theta)$ *; je peux calculer les coordonnées cartésiennes (x ; y) :*

$$x=r\cos\theta \quad et \quad y=r\sin\theta$$

Le couple $(r\,;\theta)$ correspond aux coordonnées polaires du point M dans le plan muni du repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.
Nous allons – tout simplement– traduire cette écriture avec les nombres complexes.

Définition 1.

A tout point M d'affixe z, du plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on associe les deux nombres réels :

- $r=\|\overrightarrow{OM}\|\in\mathbb{R}^+$ qu'on appelle ***le module de z*** et on note $r=|z|$; et
- $\theta=(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$ $(modulo\ 2\pi)$ qu'on appelle ***l'argument de z*** et on note $\theta=arg(z)\ [2\pi]$ (lire *modulo* 2π, c'est-à-dire à $2k\pi$ près).

Soit $z\in\mathbb{C}$ et M le M d'affixe z, du plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. D'après cette définition, nous pouvons maintenant, réécrire la forme algébrique de z.

- $z=x+iy$
- $r=|z|=\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{x^2+y^2}$
- $x=r\cos\theta$ *et* $y=r\sin\theta$
- ou encore $\cos\theta=\dfrac{x}{|z|}$ et $\sin\theta=\dfrac{y}{|z|}$

Par conséquent : $z=x+iy=r\cos\theta+i\,r\sin\theta\ =\ \boldsymbol{r}(\cos\theta+\boldsymbol{i}\sin\theta)$

Définition 2.

Soit M un point du plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.
Soit z l'affixe du point M. Alors l'écriture

$$\boxed{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{r}(\cos\theta+\boldsymbol{i}\sin\theta)}$$

s'appelle la forme trigonométrique de z, avec $\boxed{r=|z|}$ est ***le module de z*** et $\boxed{\theta=arg(z)=(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})}$ $(modulo\ 2\pi)$ est ***l'argument de z*** (à $2k\pi$ près).

Exemples

Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

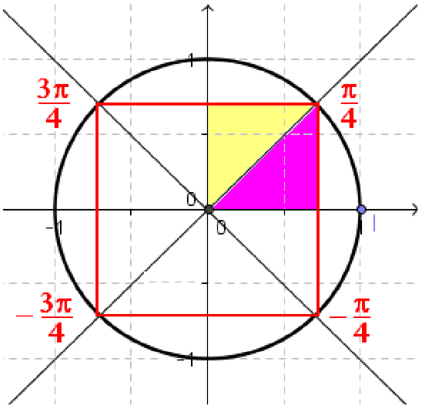
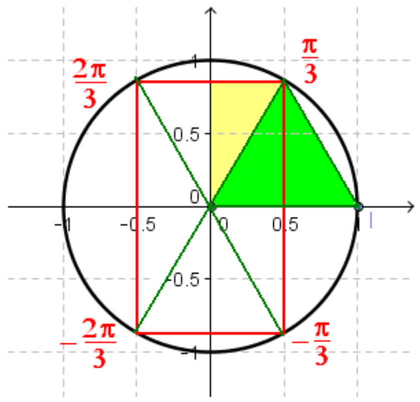
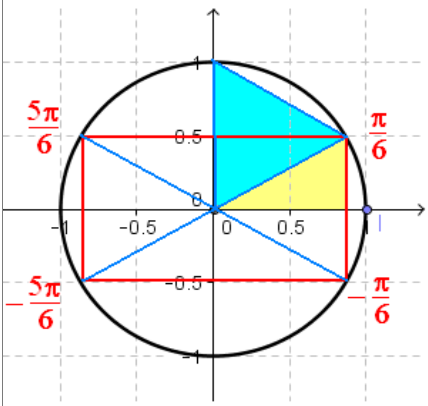
$$z_1=1+i\ ;\ z_2=1+i\sqrt{3}\ \text{ et }\ z_3=-\sqrt{3}+i$$

Pour $z_1=1+i$

- *1er réflexe* : Je calcule le module de $z_1=1+i$.
  $|z_1|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
- *2ème réflexe* : Je calcule $\cos\theta$ et $\sin\theta$:

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{x}{|z|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{y}{|z|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

– *3ème réflexe* : Je consulte mon cercle trigonométrique :

		
1er cas	***2ème cas***	***3ème cas***
$\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\theta=\pm\frac{1}{2}$	$\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\theta=\pm\frac{1}{2}$

– Nous sommes bien dans le 1er cas et $\cos\theta>0$ et $\sin\theta>0$.
Donc $\theta=\frac{\pi}{4}\quad[2\pi]$.

– Par conséquent $\boxed{z_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$

Pour $z_2=1+i\sqrt{3}$:

– *1er réflexe* : Je calcule le module de $z_2=1+i\sqrt{3}$
$|z_2|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$

– *2ème réflexe* : Je calcule $\cos\theta$ et $\sin\theta$:

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{x}{|z|}=\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{y}{|z|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

– *3ème réflexe* : Je consulte mon cercle trigonométrique :

– Cette fois, nous sommes dans le 2ème cas et $\cos\theta>0$ et $\sin\theta>0$.
Donc $\theta=\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$.

– Par conséquent $\boxed{z_2=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}$

Pour $z_3=-\sqrt{3}+i$:

– *1er réflexe* : Je calcule le module de $z_3=-\sqrt{3}+i$
$|z_3|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

- *2ème réflexe* : Je calcule $\cos\theta$ et $\sin\theta$:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- *3ème réflexe* : Je consulte mon cercle trigonométrique :
- Cette fois, nous sommes dans le 3ème cas et $\cos\theta < 0$ et $\sin\theta > 0$.

  Donc $\theta = \dfrac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$.
- Par conséquent $\boxed{z_3 = 2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)}$

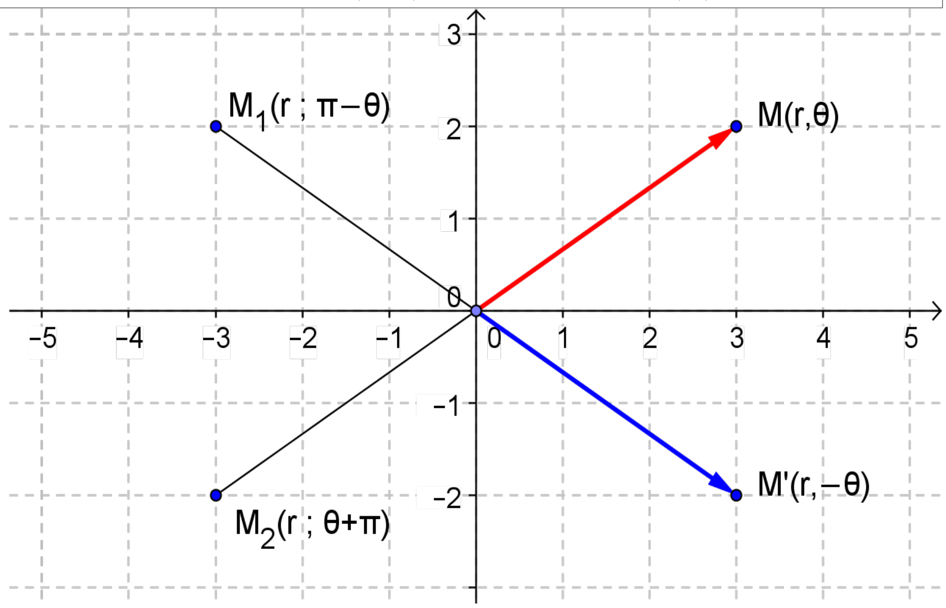
Cas particuliers très importants :
Soit z un nombre complexe non nul. On pose $z = x + iy$ et $arg(z) = \theta \quad [2\pi]$.
Alors :

- $\bar{z} = x - iy$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des abscisses :

  $\boxed{|\bar{z}| = |z| \text{ et } arg(\bar{z}) = -\theta = -arg(z) \quad [2\pi]}$
- $-z = -x - iy$ est le symétrique de z par rapport à l'origine O :

  $\boxed{|-z| = |z| \text{ et } arg(-z) = \theta + \pi = arg(z) + \pi \quad [2\pi]}$
- $-\bar{z} = -x + iy$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des ordonnées :

  $\boxed{|-\bar{z}| = |z| \text{ et } arg(\overline{-z}) = \pi - \theta = \pi - arg(z) \quad [2\pi]}$



1.2) Propriété des modules et arguments

Théorème 1.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes dont on connaît les formes trigonométriques telles que : $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Alors :

1°) $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$
2°) $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{r_2}[\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)]$, $z_2 \neq 0$
3°) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$, $z_2 \neq 0$

<u>**Démonstration**</u> :

1°) $z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$= r_1 r_2 [\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2]$

$= r_1 r_2 [(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$

$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$ = forme trigonométrique de z_1z_2.

d'après les formules d'addition de trigonométrie vues en 1ère S.

C'est aussi un moyen de "retrouver ces formules". CQFD

On en déduit immédiatement que :

(1°)	$\lvert z_1 z_2\rvert = r_1 r_2 = \lvert z_1\rvert \times \lvert z_2\rvert$	et	$arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = arg(z_1) + arg(z_2)$	$[2\pi]$
(1°bis)	$\lvert z^2\rvert = r^2 = \lvert z\rvert^2$	et	$arg(z^2) = 2\theta = 2\,arg(z)$	$[2\pi]$
(1°ter)	$\lvert z^n\rvert = r^n = \lvert z\rvert^n$	et	$arg(z^n) = n\theta = n \times arg(z)$	$[2\pi]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2°) On suppose que $z_2 \neq 0$, alors :

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{1}{r_2} \times \frac{1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}$$

On multiplie par le conjugué du dénominateur, pour obtenir :

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2} \times \frac{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire, donc :

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2} \times \frac{\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}$$

Ce qui donne : $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{r_2}[\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)]$, $z_2 \neq 0$ CQFD

On en déduit immédiatement que, pour tout $z \neq 0$:

(2°)	$\left\lvert \dfrac{1}{z_2} \right\rvert = \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{1}{\lvert z_2\rvert}$ et $arg\left(\dfrac{1}{z_2}\right) = -\theta_2 = -arg(z_2)$ $[2\pi]$

3°) On suppose que $z_2 \neq 0$. En utilisant les deux résultats précédents, on a :

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1\times\frac{1}{z_2} \quad \text{donc} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\left|z_1\times\frac{1}{z_2}\right|=|z_1|\times\left|\frac{1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$$

De même, pour l'argument :

$$arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=arg\left(z_1\times\frac{1}{z_2}\right)=arg(z_1)+arg\left(\frac{1}{z_2}\right)=arg(z_1)-arg(z_2)\quad[2\pi]\quad \text{CQFD}$$

On en déduit immédiatement que : pour tout z_1 et $z_2\neq 0$:

(3°) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ et $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=arg(z_1)-arg(z_2)\quad[2\pi]$

En résumé :

Il suffit de résumer les propriétés ainsi obtenues dans le théorème 1, pour les modules d'une part et pour les arguments d'autre part, en rajoutant quelques

Pour tous nombres complexes z_1 et $z_2\neq 0$:

(1°) $|z_1z_2|=|z_1|\times|z_2|$ et $arg(z_1z_2)=arg(z_1)+arg(z_2)\quad[2\pi]$

(2°) $\left|\frac{1}{z_2}\right|=\frac{1}{|z_2|}$ et $arg\left(\frac{1}{z_2}\right)=-\theta_2=-arg(z_2)\quad[2\pi]$

(3°) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ et $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=arg(z_1)-arg(z_2)\quad[2\pi]$

Cas particuliers très importants :

Soit *z* un nombre complexe non nul. On pose $z=x+iy$ et $arg(z)=\theta\quad[2\pi]$

4°) $|z|=0$ (ssi) $z=0$

5°) *z* est un *nombre réel positif* (ssi) $|z|=z$ (ssi) $z=x\in\mathbb{R}^+$
(ssi) $arg(z)=0\quad[2\pi]$

5°bis) *z* est un *nombre réel négatif*
(ssi) $|z|=-z$ (ssi) $z=x\in\mathbb{R}^-$ (ssi) $arg(z)=\pi\quad[2\pi]$

6°) *z* est un *imaginaire pur à coefficient positif*
(ssi) $z=iy,\ y\in\mathbb{R}^+$ (ssi) $arg(z)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

6°bis) *z* est un *imaginaire pur à coefficient négatif*
(ssi) $z=iy,\ y\in\mathbb{R}^-$ (ssi) $arg(z)=\frac{-\pi}{2}\quad[2\pi]$

1.3) Application à la géométrie

Théorème 2.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectifs z_A, z_B et z_C. Alors :

1°) $|z_A|=OA=\|\overrightarrow{OA}\|$ et $arg(z_A)=(\vec{u},\overrightarrow{OA})\quad[2\pi]$

2°) $|z_B-z_A|=AB=\|\overrightarrow{AB}\|$ et $arg(z_B-z_A)=(\vec{u},\overrightarrow{AB})\quad[2\pi]$

3°) $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\dfrac{AC}{AB}$ et $arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\quad[2\pi]$

Démonstration :

1°) Immédiat, par définition.

2°) Par définition, Pour tous points A et B du plan, il existe un point M et un seul d'affixe z_M, tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$. Donc $z_M = z_B - z_A$. Les deux égalités en découlent :

$|z_B-z_A|=|z_M|=OM=AB$ et $arg(z_B-z_A)=arg(z_M)=(\vec{u};\overrightarrow{OM})=(\vec{u};\overrightarrow{AB})$.

3°) D'après le théorème 1 et la propriété précédente, nous avons :

- d'une part : $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\dfrac{|z_C-z_A|}{|z_B-z_A|}=\dfrac{AC}{AB}$
- et d'autre part :

$$\begin{aligned} arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) &= arg(z_C-z_A)-arg(z_B-z_A)\\ &=(\vec{u},\overrightarrow{AC})-(\vec{u},\overrightarrow{AB})\\ &=(\vec{u},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AB},\vec{u})\\ &=(\overrightarrow{AB},\vec{u})+(\vec{u},\overrightarrow{AC})\\ &=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles.

Exemple d'application :

1°) Déterminer l'ensemble E_1 des points M d'affixes z dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ vérifiant l'égalité
$|z-3+2i|=5 \quad (1)$

2°) Déterminer l'ensemble E_1 des points M d'affixes z dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ vérifiant l'égalité
$|z-3+2i|=|z+1-i| \quad (2)$

3°) Soient A, B et C trois points d'affixes $z_A=3-2i$, $z_B=-1+i$ et $z_C=6+2i$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

3.a) Calculer le module et l'argument de $Z=\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$

3.b) En déduire la nature du triangle ABC.

1°) Soit A le point d'affixe $z_A = 3-2i$. On a les équivalences suivantes :

$|z-3+2i|=5$ (ssi) $|z-z_A|=5$
(ssi) $AM = 5$
(ssi) $M \in C(A;5)$.

Conclusion : E_1 est le cercle de centre A et de rayon $r = 5$.

2°) Soit A le point d'affixe $z_A = 3-2i$ et B le point d'affixe $z_B = -1+i$ On a les équivalences suivantes :

$|z-3+2i| = |z+1-i|$ (ssi) $|z-z_A| = |z-z_B|$
(ssi) $AM = BM$
(ssi) M est équidistant de A et de B
(ssi) M appartient à la médiatrice du segment [AB].

Conclusion : E_2 est la médiatrice du segment [AB].

3°.a) Soient A, B et C trois points d'affixes $z_A = 3-2i$, $z_B = -1+i$ et $z_C = 6+2i$.
On a :

$$Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(6+2i)-(3-2i)}{(-1+i)-(3-2i)} = \frac{3+4i}{-4+3i} = \frac{3+4i}{i^2 \times 4+3i} = \frac{3+4i}{i(4i+3)} = \frac{1}{i} = -i$$

Par conséquent : $|Z| = 1$ et $arg(Z) = \frac{-\pi}{2} \quad [2\pi]$.

3°.b) D'une part, $|Z| = 1$ équivaut à $\frac{AC}{AB} = 1$ équivaut à $AB = AC$.

Ce qui signifie que le triangle ABC est isocèle en A.
D'autre part : $arg(Z) = \frac{-\pi}{2}$ équivaut à $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{-\pi}{2} \quad [2\pi]$.

Ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. Donc, le triangle ABC est rectangle en A.

Conclusion : Le triangle ABC est isocèle-rectangle en A.

II. Forme exponentielle

2.1) Étude d'une fonction particulière

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{C}$ de la manière suivante $f : \theta \mapsto f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$.

D'après le 1° du théorème 1, nous avons :

$$\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta').$$

Par conséquent, on a :

Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$: $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$

Ceci signifie que la fonction f vérifie la même relation fonctionnelle que la fonction exponentielle. Donc, il existe un nombre k tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $f(\theta) = e^{k\theta}$, avec $k = f'(0)$. On calcule $f'(\theta) = -\sin\theta + i\cos\theta$ et $k = f'(0) = i$. Par suite :

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ **:** $f(\theta) = e^{i\theta}$ *et par suite* $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

2.2) Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition 1.

Pour tout nombre $\theta \in \mathbb{R}$, on note : $\mathbf{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
Par conséquent, tout nombre complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme :

$$z = r\,e^{i\theta} \quad \text{(Attention } r \geqslant 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}\text{)}$$

Cette écriture s'appelle ***la forme exponentielle*** ou ***la notation exponentielle*** du nombre complexe *z*.

D'après le théorème 1, nous pouvons énoncer sous la forme exponentielle, les mêmes propriétés écrites sous la forme trigonométriques :

Théorème 3.

Pour tous nombres $r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, on a :

1°) $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta$. Nous avons bien sûr : $e^{i0} = e^0 = 1$

2°) $r_1 e^{i\theta_1} \times r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

3°) $\dfrac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} \times e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

Démonstration :
Ce sont des conséquences directes du théorème n°1.

Corollaires

1°) ***Formule de MOIVRE :*** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad \text{ou encore} \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

2°) ***Formules d'EULER :*** $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

3°) ***Formules trigonométriques :*** Pour tous réels a et b, on a :

Formules d'addition :

a) $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

b) $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

Formules de duplication :

c) $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

d) $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$

Démonstration :
1°. a) Nous démontrons d'abord le résultat pour $n \in \mathbb{N}$. On fait un raisonnement par récurrence. Pour chaque entier n, on appelle P_n la proposition logique
P_n : [$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$].

i) <u>Initialisation</u>.

Pour n = 0, $(e^{i\theta})^0 = 1 = e^0 = e^{i\times 0\times\theta}$ Donc P_0 est vraie.

(On aurait pu commencer également à n = 1).

ii) <u>Hérédité</u>.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n est vraie. C'est-à-dire : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Mais alors : $(e^{i\theta})^{n+1} = (e^{i\theta})^n \times e^{i\theta}$ par définition des la puissance (n+1)

$(e^{i\theta})^{n+1} = e^{in\theta + i\theta}$ d'après l'hypothèse de récurrence

$(e^{i\theta})^{n+1} = e^{in\theta + i\theta}$ d'après la propriété 2°) du théorème 3

D'où : $(e^{i\theta})^{n+1} = e^{i(n+1)\theta}$ en mettant θ en facteur.

Donc P_{n+1} est vraie.

Par conséquent : Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

1°. b) Montrons maintenant que le résultat est vrai pour $n \in \mathbb{Z}$ et $n < 0$.

On pose $n' = -n$. Alors $n' \in \mathbb{N}$. On peut donc appliquer la propriété avec $n' > 0$.

On a : $(e^{i\theta})^n = \dfrac{1}{(e^{i\theta})^{-n}} = \dfrac{1}{(e^{i\theta})^{n'}} = \dfrac{1}{e^{in'\theta}} = \dfrac{1}{e^{-in\theta}} = e^{in\theta}$. CQFD

<u>**Conclusion .**</u> : Pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

2°) Formules d'Euler : On calcule d'abord $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \overline{e^{i\theta}}$

On sait que : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (1)

et $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ (2)

- En additionnant membre à membre (1)+(2), nous obtenons :

  $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$. D'où le résltat : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

- En soustrayant membre à membre (1)+(2), nous obtenons :

  $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$. D'où le résltat : $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ CQFD

3°) On écrit : $e^{ia} = \cos a + i\sin a$ et $e^{ib} = \cos b + i\sin b$

D'après le théorème 3, on a d'une part : $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$ (3)

et d'autre part : $e^{i(a+b)} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$

En développant le produit et en regroupant les parties réelle et imaginaire, on obtient:

$e^{i(a+b)} = (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + i(\sin a\cos b + \cos a\sin b)$ (4)

Les deux nombres complexes définis dans (3) et (4) sont égaux. Donc, par identification, leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales.D'où le résultat :

a) Re($e^{i(a+b)}$) = $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

b) Im($e^{i(a+b)}$) = $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$. CQFD

Pour les formules de duplication, il suffit de prendre $b=a$ dans les formules ci-dessus.

OUF !