

Devoir Maison de mathématiques n°2 T3

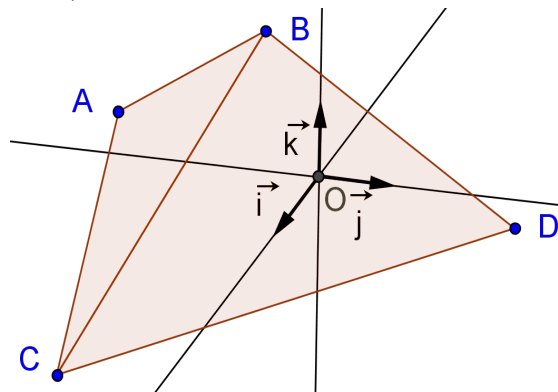
à rendre le jeudi 16 mai 2013

Exercice n°1 (10 points)

L'espace E est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives : $A(3 ; -2 ; 2)$; $B(6 ; 1 ; 5)$; $C(6 ; -2 ; -1)$.

Partie A

- 1°) Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
- 2°) Soit P le plan d'équation cartésienne $x+y+z-3=0$.
Montrer que P est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A .
- 3°) Soit P' le plan orthogonal la droite (AC) et passant par le point A . Déterminer une équation cartésienne de P' .
- 4°) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ , droite d'intersection des plans P et P' .



Partie B

- 1°) Soit D le point de coordonnées $(0 ; 4 ; -1)$.
Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC) .
- 2°) Calculer le volume du tétraèdre $ABDC$.
- 3°) Montrer que l'angle géométrique BDC a pour mesure $\frac{\pi}{4}$ radian.
- 4°a) Calculer l'aire du triangle BDC .
b) En déduire la distance du point A au plan (BDC)

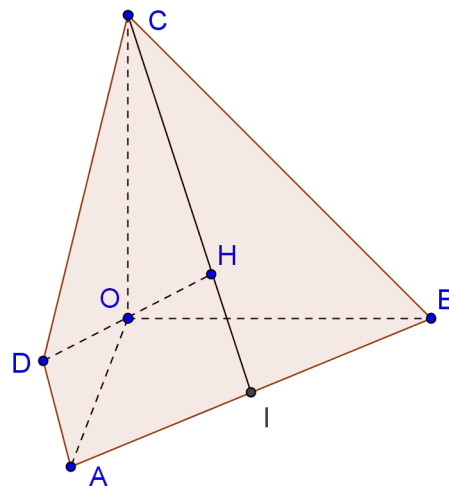
Exercice n°2 (10 points)

Soient a un réel strictement positif et $OABC$ un tétraèdre tel que :

- OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O ,
- $OA = OB = OC = a$.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC ,
 H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC , et D le point de l'espace défini par $\vec{HO} = \vec{OD}$

- 1°) Quelle est la nature du triangle ABC ?
- 2°) Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC .
- 3°) Calcul de OH
3°a) Calculer le volume V du tétraèdre $OABC$ puis l'aire S du triangle ABC .



3° b) Exprimer OH en fonction de V et de S , en déduire que : $OH = a \frac{\sqrt{3}}{3}$.

- 4°) Étude du tétraèdre $ABCD$. On pose : $\vec{i} = \frac{1}{a}\vec{OA}$, $\vec{j} = \frac{1}{a}\vec{OB}$ et $\vec{k} = \frac{1}{a}\vec{OC}$.

L'espace E est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 4°a) Démontrer que le point H a pour coordonnées : $(a/3 ; a/3 ; a/3)$
- 4°b) Démontrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).
- 4°c) Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.