Chapitre 6

Probabilités

Ce que dit le programme :

<table>
<tr><th>CONTENUS</th><th>CAPACITÉS ATTENDUES</th><th>COMMENTAIRES</th></tr>
<tr><td colspan="3">Objectifs visés par l'enseignement des statistiques et probabilités à l'occasion de résolutions de problèmes dans le cadre des probabilités, rendre les élèves capables :
d'étudier et modéliser des expériences relevant de l'équiprobabilité (par exemple, lancers de pis ou de dés, tirage de cartes) ; ✓
de proposer un modèle probabiliste à partir de l'observation de fréquences et ce dans des situations simples ; ✓
d'interpréter des événements de manière ensembliste ; de mener à bien des calculs de probabilité. ✓
Les situations étudiées concernent des expériences à une ou plusieurs épreuves. ✓
La répétition d'expériences aléatoires peut donner lieu à l'écriture d'algorithmes (marches aléatoires). ; ☒</td></tr>
<tr><td>Probabilité sur un ensemble fini
Probabilité d'un événement. ; ✓</td><td>Déterminer la probabilité d'événements dans des situations d'équiprobabilité. ✓
Utiliser des modèles définis à partir de fréquences observées.; ✓</td><td>La probabilité d'un événement est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.
✓</td></tr>
<tr><td>Réunion et intersection de deux événements, formule ; ☒
$p(A\cup B)+p(A\cap B)=p(A)+p(B)$.</td><td>Connaître et exploiter cette formule.
; ☒</td><td>Pour les calculs de probabilités, on utilise des arbres, des diagrammes ou des tableaux.; ☒</td></tr>
</table>

I. Expérience aléatoire

Aléatoire, adjectif = imprévisible ; lié au hasard, arbitraire,

Aléa, nom commun = Au sens propre, tournure non-prévisible que peut prendre un événement. Au sens commercial, risque financier ou industriel pris vis-à-vis d'un client dont la situation est soumise à une évolution incertaine. (Wikipédia).

1.1) Vocabulaire des probabilités

Définitions 1.

- On dit qu'une ***expérience*** est ***aléatoire*** si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- On peut déterminer parfaitement, par avance, toutes les ***issues possibles*** ;
- On ne peut pas prévoir, par avance, laquelle de ces issues sera réalisée.

- On appelle ***univers*** de l'expérience aléatoire, et on note Ω (lire *Oméga*), l'ensemble formé de toutes les issues possibles de cette expérience.

- Un ***événement*** est une partie de l'univers, formée d'une ou de plusieurs issues possibles.

- Un ***événement élémentaire*** est une partie de l'univers, formée d'une seule issue possible.

1.2) Exemples

Exemple 1.

Lancer un dé à 6 faces et noter le chiffre apparent sur la face supérieure, est une expérience aléatoire :

- Il y a 6 issues possibles ;
- L'univers de l'expérience est $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$;
- A = « le résultat est pair » est un *événement* écrit en langage courant; qu'on peut exprimer en langage symbolique *comme un ensemble* : $A=\{2;4;6\}$.
- B = « le résultat est un 6 » est un *événement élémentaire* écrit en langage courant; qu'on peut exprimer en langage symbolique *comme un ensemble* : $B=\{6\}$. Noter que « 6 » est *une issue* possible, alors que l'événement B est un ensemble qui contient cette seule issue.

Exemple 2.

Lancer une pièce de monnaie à 2 faces "Pile" ou "Face" et noter la face exposée, est une expérience aléatoire :

- Il n'y a que 2 issues possibles ;
- L'univers de l'expérience est $\Omega=\{P;F\}$;
- A = « le résultat est Pile » et B = « le résultat est Face » sont des *événements élémentaires* écrits en langage courant; qu'on peut exprimer en langage symbolique : $A=\{P\}$ et $B=\{F\}$. $\Omega=\{P;F\}$ est aussi un événement.

Exemple 3.

Le tirage d'une boule dans une urne qui contient par exemple 10 boules de couleur et numérotées : 2 blanches B_1 et B_2 ; 3 rouges, R_1, R_2 et R_3 et 5 vertes V_1, V_2, ...V_5, définit une expérience aléatoire à condition que toutes les boules soient de même dimension et indiscernables au toucher,... sinon...

- Il y a 10 issues possibles ;
- L'univers de l'expérience est $\Omega=\{B_{1,}B_{2,}R_{1,}R_{2,}R_{3,}V_{1,}V_{2,}V_{3,}V_{4,}V_5\}$;
- R = « la boule tirée est rouge » est un *événement* qu'on peut aussi écrire : $R=\{R_{1,}R_{2,}R_3\}$.
- T = « la boule tirée porte le numéro 3 » est un *événement* qu'on peut aussi écrire : $B=\{R_{3,}V_3\}$.

Exemple 4.

Tirage d'une carte dans un jeu de 52 cartes (pas de joker). Il y a deux couleurs, rouge et **noir** et quatre familles : **Carreau**, **Coeur**, **Pique** et **Trêfle** et il y a des numéros de 1 à 10 et des figures : Valets, Dames et Rois.

- Il y a 52 issues possibles ;
- L'univers **Ω** de l'expérience contient les 52 cartes ;
- A = « la carte tirée est un As » est un *événement* qui contient 4 issues possibles;
- L'événement F = « la carte tirée est une figure » contient 12 issues possibles;
- L'événement T = « la carte tirée est un Trêfle » contient 13 issues possibles.

Définition 2.

L'univers Ω d'une expérience aléatoire est aussi un événement, qu'on appelle ***l'événement certain***, alors que l'ensemble vide $\varnothing$ s'appelle ***l'événement vide*** ou encore ***l'événement impossible***.

II. Probabilité d'un événement

2.1) Probabilité théorique

Définitions 3.

Pour certaines expériences aléatoires, sous certaines conditions, on peut déterminer en pourcentage ou par un quotient « la chance » qu'un événement a pour se réaliser. Ce nombre s'appelle la « ***probabilité*** » ou « ***probabilité théorique*** » de l'événement.

Exemple 5.

Le lancer d'un dé à 6 faces *parfaitement équilibré*. On dit que le dé est *non pipé* ou *non truqué*. L'univers de l'expérience aléatoire est $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$;
On peut supposer donc que les six faces ont exactement la même chance d'apparaître.
Par conséquent, la *probabilité théorique* de l'apparition de chaque face est de $\frac{1}{6}$.

Si on note E_1 ="obtenir la face 1", on a $E_1 = \{1\}$ et $P(E_1) = \frac{1}{6}$.

On note de même E_k ="obtenir la face k", k =1;2;...6, alors $E_k = \{k\}$ et $P(E_k) = \frac{1}{6}$.

Ce qui donne : $P(E_k) = \frac{1}{6} \simeq 0,16666...$ pour tout k =1;2;...6,

On peut aussi écrire en langage symbolique : $P(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$ pour tout $\omega \in \Omega$.

De même, si A ="le résultat est pair" alors $A = \{2 ; 4 ; 6\}$ et A a trois chances sur six d'être réalisé. Donc $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ qu'on peut écrire P(A) = 0,5 ou encore 50%.

Remarque

La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1 qui s'écrit :

- sous la forme fractionnaire (numérateur inférieur au dénominateur) ;
- ou sous la forme d'un pourcentage (valeur arrondie en général) ;
- ou encore sous la forme d'un nombre décimale (valeur arrondie en général).

Exemple 6.

Une urne contient 10 boules de *même dimension* et *indiscernables au toucher*, de couleur et numérotées : deux blanches B_1 et B_2 ; trois rouges, R_1, R_2 et R_3 et cinq vertes V_1, V_2, ...V_5. On tire une boule de cette urne et on note sa couleur et son numéro. On peut supposer donc que les dix boules ont exactement la même chance d'être tirées. Par conséquent, la *probabilité théorique* du tirage de chaque boule est de

$\frac{1}{10}$ Si R désigne l'événement « la boule tirée est rouge » alors $R=\{R_1, R_2, R_3\}$ et

Donc P(R) = $\frac{3}{10}$ qu'on peut écrire P(R) = 0,3 = $\frac{30}{100}$ donc P(R) = 30%.

2.2) Probabilité et fréquence

Théorème 1. (Loi des grands nombres)

> Si on répète une expérience aléatoire un très grand nombre de fois, les fréquences de réalisation de n'importe quel événement ***se rapprochent et finissent par se stabiliser*** autour de la ***probabilité théorique*** de l'événement.

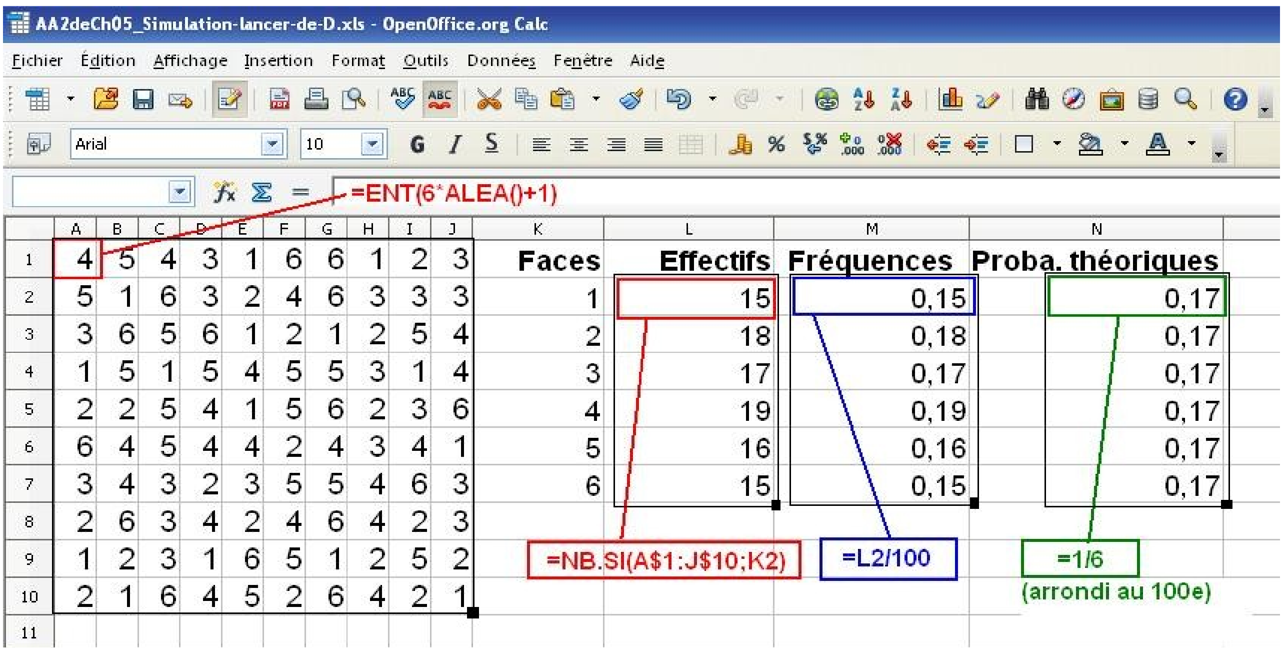
Remarque

Si on lance un dé plusieurs fois, même s'il est « parfaitement équilibré », nous ne sommes pas sûrs que chaque face aura « exactement » 1 chance sur 6 d'apparaître !! C'est pourquoi, nous parlons de « *probabilité théorique* » car, dans la pratique, les réalisations sont « aléatoires » donc imprévisibles. Mais le théorème nous affirme que, si on recommence un grand nombre de fois, nous nous approchons de cette probabilité théorique,...

Exemple 7. **Activité :** Simulation de lancers d'un dé parfaitement équilibré.
Nous avons vu que la probabilité théorique de chaque événement élémentaire est :

P({ω}) = $\frac{1}{6} \simeq 0{,}16666\ldots$ pour tout $\omega \in \Omega$.

A l'aide d'un tableur, nous réalisons cette simulation en utilisant les fonctions **ALEA()** **ENT(-)** et **NB.SI(- ;-)**. Voir procédure dans le fichier du professeur Christophe Lainé : « Simulation de lancer d'un dé ». Nous avons obtenu les résultats suivants avec la simulation de 100 lancers aléatoires :


AA2deCh05_Simulation-lancer-de-D.xls - OpenOffice.org Calc

=ENT(6*ALEA()+1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	4	5	4	3	1	6	6	1	2	3	Faces	Effectifs	Fréquences	Proba. théoriques
2	5	1	6	3	2	4	6	3	3	3	1	15	0,15	0,17
3	3	6	5	6	1	2	1	2	5	4	2	18	0,18	0,17
4	1	5	1	5	4	5	5	3	1	4	3	17	0,17	0,17
5	2	2	5	4	1	5	6	2	3	6	4	19	0,19	0,17
6	6	4	5	4	4	2	4	3	4	1	5	16	0,16	0,17
7	3	4	3	2	3	5	5	4	6	3	6	15	0,15	0,17
8	2	6	3	4	2	4	6	4	2	3				
9	1	2	3	1	6	5	1	2	5	2		=NB.SI(A$1:J$10;K2)	=L2/100	=1/6
10	2	1	6	4	5	2	6	4	2	1				(arrondi au 100e)
11														

Évidemment, nous pouvons recommencer la même procédure avec 1000 valeurs (on arrondit au 1000ème), puis 10000, puis 100 000 valeurs, nous obtenons des fréquences très proches de **0,1666**...

2.3) Calcul des probabilités

Définition 4.

Pour définir les probabilités des événements associés à une expérience aléatoire, on définit les probabilités de tous les événements élémentaires. On dit qu'on a donné la ***loi de probabilité*** de cette expérience.

Exemple 8.

La loi de probabilité du lancer d'un dé parfaitement équilibré est donnée par : pour tout $\omega \in \Omega$. $P(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$. On peut aussi écrire la loi de probabilité dans un tableau :

issues ω	1	2	3	4	5	6	Total
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Théorème 2. *(très important)*

Dans une expérience aléatoire,

1. la probabilité P(A) d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1.

   $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

2. En particulier : $P(\varnothing) = 0$ et $P(\Omega) = 1$.
3. la somme des probabilités de tous les événements élémentaires E_k ($1 \leqslant k \leqslant n$) est égale à 1 :

   Si $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \omega_3 ; ... ; \omega_n\}$, alors $P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_n) = 1$.

4. la probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Exemple 9.

Un dé est ***truqué*** de telle façon que la probabilité de chaque face est proportionnelle au numéro de la face. Donner la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

On peut aussi écrire la loi de probabilité dans un tableau :

$\times a$

Valeurs de ω	1	2	3	4	5	6	Total
$P(\{\omega\})$	$1 \times a$	$2 \times a$	$3 \times a$	$4 \times a$	$5 \times a$	$6 \times a$	1

D'après le théorème, la somme des probabilités de tous les événements élémentaires

E_k est égale à 1. Donc : $P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)+P(E_4)+P(E_5)+P(E_6)=1$. Donc :
. Donc $a\times(1+2+3+4+5+6)=1$.

Donc $a\times 21=1$. Donc : $a=\frac{1}{21}$. Par conséquent, la loi de probabilité de cette expérience aléatoire est donnée par le tableau suivant :

Valeurs de ω	1	2	3	4	5	6	Total
P({ω})	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$	1

Soit A l'événement « le résultat est pair » ; alors A={2 ; 4 ; 6} donc

$P(A) = \frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

2.4) Équiprobabilité

Définition 5.

Dans une expérience aléatoire, si *tous les événements élémentaires ont la même probabilité* d'être réalisés, on dit qu'on est dans une ***situation d'équiprobabilité*** ou que l'expérience aléatoire est ***équiprobable***.

Définition 6.

Si A est un ensemble fini, on appelle ***cardinal de A***, et on note ***card(A)***, le nombre d'éléments dans A.

Exemple 10.

Si A désigne l'ensemble des nombres entiers pairs compris entre 1 et 12 (exclus), alors A = {2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10} et card(A) = 5, puisque A contient 5 éléments.

Théorème 3.

Dans une expérience aléatoire ***équiprobable*** ayant ***n*** événements élémentaires, on a :

1. la probabilité de chaque événement élémentaire est égale à $\frac{1}{n}$.
2. la probabilité d'un événement quelconque A est donnée par

$$P(A)=\frac{Nombre\ d'issues\ favorables}{Nombre\ d'issues\ possibles}=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{k}{n}$$

où *k* désigne le cardinal de A.

Exemple 11.

Tirage d'une carte dans un jeu de 52 cartes (pas de joker).

- Il y a 52 issues possibles ;

- L'univers **Ω** de l'expérience contient les 52 cartes ;
- Toutes les cartes ont la même chance d'être tirées. Donc, on est en situation d'équiprobabilité. La loi de probabilité de cette expérience est :

  pour tout $\omega \in \Omega$. $P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{52}$.
- A = « la carte tirée est un As » est un *événement* qui contient 4 issues favorables ; donc :

  Card(A) = 4 et Card(**Ω**) = 52. Donc $P(A)=\dfrac{card(A)}{card(\Omega)}=\dfrac{4}{52}$ et $P(A)=\dfrac{1}{13}$
- L'événement T = « la carte tirée est un Trêfle » contient 13 issues favorables.

  Card(T) = 13 et Card(**Ω**) = 52. Donc $P(T)=\dfrac{card(T)}{card(\Omega)}=\dfrac{13}{52}$ et $P(T)=\dfrac{1}{4}$

2.5) Événement contraire

Définition 5.

Dans une expérience aléatoire, on appelle ***événement contraire*** d'un événement A, l'événement, noté $\overline{A}$ qui contient toutes les issues qui n'appartiennent pas à A.
Autrement dit : Pour tout $\omega \in \Omega$: [$\omega \in \overline{A}$ si, et seulement si $\omega \notin A$]

Exemple 12.

Une urne contient dix cartes identiques numérotées de 1 à 10. L'expérience aléatoire consiste à tirer une carte de cette urne. L'univers **Ω** est l'ensemble des nombres entiers de 1 à 10. Soit l'événement A ="la carte tirée porte un numéro multiple de 3" donc

A = {3 ; 6 ; 9}. Card(A) = 3 et $P(A)=\dfrac{card(A)}{card(\Omega)}=\dfrac{3}{10}$.

$\overline{A}$ = {1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8 ; 10}. Card($\overline{A}$) = 7 et $P(\overline{A})=\dfrac{card(\overline{A})}{card(\Omega)}=\dfrac{7}{10}$.

Remarque.

Si A est un événement qui contient p issues favorables (sur les n issues de Ω), alors $\overline{A}$ contient $(n-p)$ issues favorables. Donc

$$P(\overline{A})=\frac{card(\overline{A})}{card(\Omega)}=\frac{n-p}{n}=\frac{n}{n}-\frac{p}{n}=1-\frac{card(A)}{card(\Omega)}=1-P(A)$$

Théorème 4.

Dans une expérience aléatoire, si A est un événement et $\overline{A}$ son événement contraire, alors : $P(\overline{A})=1-P(A)$

Exemple 13.

Dans l'exemple précédent, nous avons ***calculé*** $P(A)=\dfrac{3}{10}$ et $P(\overline{A})=\dfrac{7}{10}$.

On aurait pu « déduire » ce dernier résultat du théorème 4, en écrivant :

$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\dfrac{3}{10}=\dfrac{7}{10}$.

III. Intersection et réunion d'événements

3.1) Vocabulaire

Définitions 6.

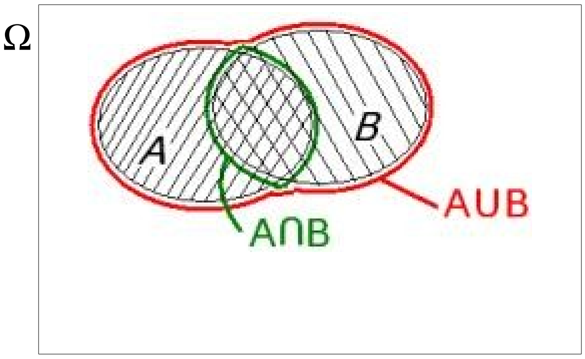
Dans une expérience aléatoire, on consière deux événements A et B.

a) On appelle ***intersection*** des deux événements $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ et on note $\boldsymbol{A \cap B}$, l'événement « ***A et B*** » qui est réalisé lorsque les deux événements A et B sont réalisés *simultanément*. Autrement dit :

$A \cap B$ est réalisé si et seulement si, ***A est réalisé*** ***et*** ***B est réalisé***

b) On appelle ***réunion*** des deux événements $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ et on note $\boldsymbol{A \cup B}$, l'événement « ***A ou B*** » qui est réalisé lorsque l'un des deux événements A ou B est réalisé. Autrement dit :

$A \cup B$ est réalisé si et seulement si, ***A est réalisé*** ***ou*** ***B est réalisé***



Définitions 7.

Dans une expérience aléatoire, on consière deux événements A et B.

a) On dit que A et B sont deux ***événements incompatibles*** lorsque les deux événements A et B ne peuvent pas se réaliser simultanément. Autrement dit :

A et B sont incompatibles si et seulement si, $\boldsymbol{A \cap B = \varnothing}$

Exemple 14.

Une urne contient dix cartes identiques numérotées de 1 à 10. L'expérience aléatoire consiste à tirer une carte de cette urne. L'univers $\boldsymbol{\Omega}$ est l'ensemble des nombres entiers de 1 à 10. On considère les événements suivants :

- A ="la carte tirée porte un numéro multiple de 3", donc $A = \{\,\mathbf{3}\,;6\,;\mathbf{9}\}$;
- B ="la carte tirée porte un numéro impair", donc $B = \{1; \mathbf{3}\,; 5\,; 7\,; \mathbf{9}\}$;
- C ="la carte tirée porte un numéro multiple de 4", donc $C = \{4\,;8\}$.

$A \cap B$ ="A *et* B" = "la carte tirée porte un numéro impair et multiple de 3"

Donc $A \cap B = \{3\,;9\}$. A et B ne sont pas incompatibles car $A \cap B \neq \varnothing$.

$A \cup B$ ="A *ou* B" = "la carte tirée porte un numéro impair ou est multiple de 3"

Donc $A \cup B = \{1; 3\,; 5\,; 6\,; 7\,; 9\}$.

Par contre : $A \cap C$ ="A *et* C" = "la carte tirée porte un numéro multiple de 3 et de 4"
Donc $A \cap C = \emptyset$. Donc A et C sont deux événements incompatibles.

Cas particulier.
Si A est un événement, alors A et $\overline{A}$ sont deux événements incomparibles.

3.2) Probabilité d'une réunion

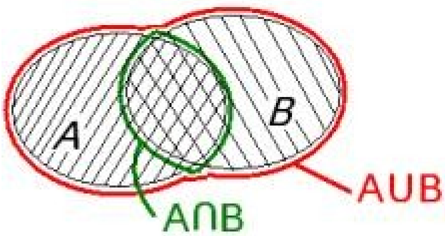
Théorème 5.

Dans une expérience aléatoire, on consière deux événements A et B.

a) Si A et B sont deux événements quelconques, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

b) Si A et B *sont* ***incompatibles***, alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.



Démonstration.
a) Pour démontrer ce résultat, il suffit de dénombrer (compter) les nombres d'élements dans chaque ensemble.
Dans $A \cup B$, si on additionne le nombre d'éléments de A et le nombre d'éléments de B, on aura compté 2 fois le nombre d'éléments de $A \cap B$. Donc, il faut le soustraire une fois. Ce qui donne :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

En divisant les deux membres par Card(Ω) = n, on obtient :

$$P(A \cup B) = \frac{card(A)}{n} + \frac{card(B)}{n} - \frac{card(A \cap B)}{n}$$

D'où le résultat : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

b) Ce deuxième résultat est un cas particulier du *a*). En effet, si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \emptyset$. Comme P($A \cap B$) = P(∅) = 0. D'où le résultat.

CQFD.

Exemple 14.
Dans une classe de Seconde de 35 élèves, option langues vivantes, 5 élèves font uniquement du russe, et parmi les trente autres, vingt font anglais et dix-huit font espagnol.On choisit au hasard un élève dans cette classe. Calculer les probabilités de R = "l'élève fait du russe", A = "l'élève fait de l'anglais", E = "l'élève fait de l'espagnol", F = "l'élève fait du russe et de l'anglais" et G ="l'élève fait de l'anglais et de l'espagnol".
Ω est l'ensemble des trente-cinq élèves. On est dans une situation d'équiprobabilité.

a) $P(R)=\frac{card(R)}{card(\Omega)}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$, $P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$ et $P(E)=\frac{18}{35}$

b) Il n'y a aucun élèves qui fait à la fois russe et anglais. Donc, les deux événements R et A sont *incompatibles*. Donc P($R \cap A$) = P($\varnothing$) = 0.

c) D'après l'énoncé, 30 élèves font "anglais ou espagnol". Donc Card($A \cup E$)=30.

$$P(A\cup E)=\frac{card(A\cup E)}{card(\Omega)}=\frac{30}{35}=\frac{6}{7} .$$

Or, d'après le théorèmee 5, on a :

$$P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E).$$

En rempalçant par les valeurs connues, on obtient :

$$\frac{6}{7}=\frac{4}{7}+\frac{18}{35}-P(A\cap E)$$

Donc : $$P(A\cap E)=\frac{20}{35}+\frac{18}{35}-\frac{30}{35}$$

D'où : $$P(A\cap E)=\frac{8}{35}$$

Conclusion : 8 élèves sur les 35 font "*anglais **et** espagnol*".

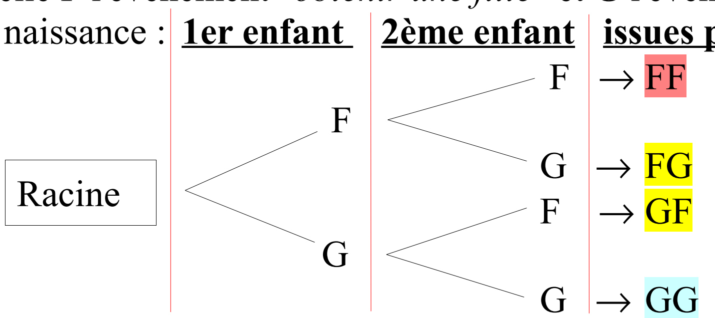
IV. Utiliser un arbre pour calculer des probabilités

4.1) 1ère situation : dénombrer toutes les issues possibles

Exemple 15.

Une famille a deux enfants. On suppose qu'il y a autant de chances d'obtenir un garçon qu'une fille. Calculer la probabilité des événements "*obtenir deux filles*" puis "*obtenir deux enfants de sexes différents*". (On suppose qu'il n'y a pas de jumeaux).

On appelle F l'événement "*obtenir une fille*" et G l'événement "*obtenir un garçon*" à chaque naissance :



Un arbre permet de distinguer tous les cas possibles, donc toutes les issues possibles.

Une branche** = **Un cas

L'univers associé à cette situation comporte *quatre* issues possibles. Donc :

$\Omega = \{FF ; FG ; GF ; GG\}$. Ainsi, La probabilité d'obtenir deux filles est

P("FF") = $\frac{nombre\ d'issues\ favorables}{nombre\ d'issues\ possibles}=\frac{1}{4}$ et si on appelle B = "obtenir deux enfants de sexes différents", on a B = {FG ; GF} et Card(B) = 2.

Donc P(B) = $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Remarque : Pour *trois enfants*, faites un arbre et montrer qu'il y a 8 issues possibles !

4.2) 2ème situation : Arbre pondéré pour calculer des probabilités

Définitions 8.

Dans une expérience aléatoire, on consière deux événements A et B.
On dit qu'***un arbre est pondéré*** lorsque, sur chaque branche, on indique la probabilité d'obtenir l'événement suivant.

Méthode de calcul :

Règle 1 *:* La somme des probabilités des branches partant d'une même racine est toujours égale à 1 :

Règle 2 *:* La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches de ce chemin.

Règle 3 *:* La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins correspondant à cet événement.

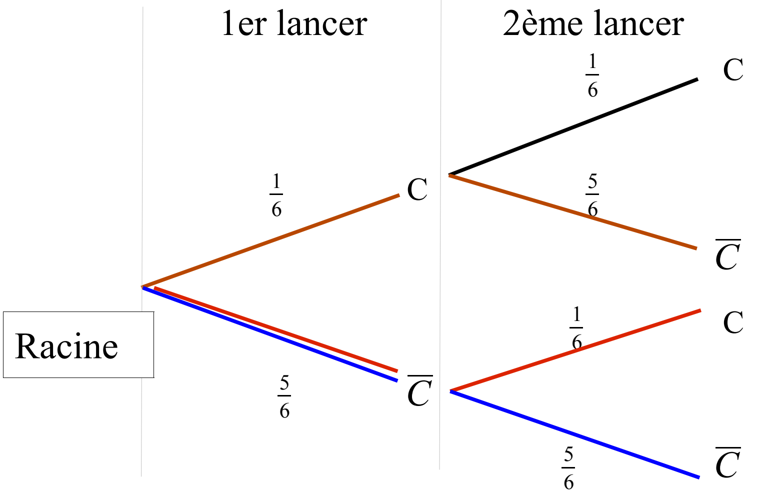
Exemple 16.

On lance un dé parfaitement équilibré. On note la face obtenue. On recommence l'épreuve 1 fois. Calculer la probabilité de des événements suivants :
E = "N'obtenir aucun 5 sur les deux lancers" et F = "Obtenir exactement un sel 5".

Pour chaque lancer, il n'y a que deux issues possibles : C = "obtenir un 5" et $\overline{C}$ = "obtenir un nombre autre que 5".

Donc, d'après ce qui précède Ω = {CC ; $C\overline{C}$; $\overline{C}C$; $\overline{C}\overline{C}$ }.
Le dé est parfaitement équilibré, donc chaque lancer est une expérience équiprobable

Donc : P(C) = $\frac{1}{6}$ et $P(\overline{C})=1-P(C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.



Probabilité de chaque chemin

→ P(" CC ") = $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

→ P(" $C\overline{C}$ ") = $\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$

→ P(" $\overline{C}C$ ") = $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$

→ P(" $\overline{C}\overline{C}$ ") = $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$

E = " $\overline{C}\overline{C}$ " = chemin bleu ; F =" $C\overline{C}$ " = la somme des 2 chemins rouges :

P(E) = P(" $\overline{C}\overline{C}$ ") = $\frac{25}{36}$ et P(F) = P(" $C\overline{C}$ ") + P(" $\overline{C}C$ ") = $\frac{5}{6}+\frac{5}{6}=\frac{10}{36}$.