Généralités sur les fonctions
Fonctions de référence

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUS	COMMENTAIRES
Étude de fonctions *Fonctions de référence* $x \to \sqrt{x}$ *et* $x \to x^3$	*Connaître les variations de ces deux fonctions et leur représentation graphique.*	*On* consolide l'ensemble des fonctions mobilisables, enrichi de deux nouvelles fonctions de référence, la fonction racine carrée et la fonction cube.

I. Généralités sur les fonctions

1.1) Domaine de définition

Définition 1.

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
Une fonction f de D dans $\mathbb{R}$ est une correspondance qui à tout nombre $x \in D$ fait associer ***au plus* un nombre réel** (*un seul ou rien*) noté y ou $f(x)$. On note :

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$x \to y = f(x)$$

Le nombre y (*lorsqu'il existe*) s'appelle ***l'image*** de x par la fonction f.

Le nombre x s'appelle ***un** antécédent* de y par la fonction f dans D.

Un nombre pris dans l'ensemble de départ, ne peut avoir qu'une ***seule image*** (ou rien) au maximum. Par contre un nombre pris dans l'ensemble des valeurs, peut avoir un ou plusieurs antécédents ou rien du tout dans l'ensemble de départ.

Définition 2.

L'*ensemble de définition* ou le *domaine de définition* d'une fonction f est l'ensemble des nombres réels x pour lesquels $f(x)$ existe ou est calculable. On le note : D_f .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: [$x \in D_f$ si et seulement si ***f(x) existe et est unique***]

Remarque

Lorsqu'on étudie une fonction, il est nécessaire de donner d'abord son domaine de définition. On peut alors l'étudier sur tout intervalle I contenu dans D_f .

On distingue, en général, deux conditions d'existence :

C1 : Une expression algébrique ***dans un dénominateur*** doit être différente de zéro ;
C2 : Une expression ***sous la racine carrée*** doit être positive ou nulle.

D'autres conditions s'ajouteront en étudiant de nouvelles fonctions.

Exemple 1.
Soit *f* la fonction définie par $f(x)=3x^2-5x+7$
Cette fonction est définie pour tout nombre $x\in\mathbb{R}$ et ne pose aucun problème d'existence. Donc son domaine de définition est $D_f=\mathbb{R}$.

Exemple 2.
Soit *f* la fonction définie par $f(x)=\dfrac{3}{x-4}$
$f(x)$ contient ***une expression au dénominateur***. Donc, il faut chercher et exclure ***la*** ou ***les valeurs interdites*** (v.i.) qui annulent le dénominateur.

Soit $x\in\mathbb{R}$.
x est une valeur interdite (ssi) $x-4=0$ (ssi) $x=4$.

4 est donc une valeur interdite (la seule) pour *f* . Donc le domaine de définition de *f*

est : $D_f=\mathbb{R}\setminus\{4\}$ (lire « $\mathbb{R}$ *privé de* 4 »)

qu'on peut aussi écrire D_f =]–∞ ; 4 [∪] 4 ; +∞[.

Exemple 3.
Soit *f* la fonction définie par $f(x)=\dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$
$f(x)$ contient ***une expression au dénominateur***. Donc, il faut chercher et exclure ***la*** ou ***les valeurs interdites*** (v.i.) qui annulent le dénominateur.

Soit $x\in\mathbb{R}$.
x est une valeur interdite (ssi) $x^2-4x+3=0$

On résout une équation du second degré. Pour cela, on calcule le discriminant Δ :

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times3=16-12=4$

$\Delta=4>0$, donc cette équation admet deux solutions (faites le calcul) :

$$x_1=1 \quad \text{et} \quad x_2=3.$$

Les valeurs interdites (les seules) sont 1 et 3. Donc le domaine de définition est

$$D_f=\mathbb{R}\setminus\{1;3\}\ .$$

Exemple 4.
Soit *f* la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x+2}$.

$f(x)$ contient une ***expression sous la racine carrée***. Donc, il faut chercher et exclure les valeurs interdites (v.i.) qui rendent négative cette expression, ***ou bien*** chercher directement les valeurs pour lesquelles cette expression est positive ou nulle.

Soit $x\in\mathbb{R}$. $x\in D_f$ (ssi) $x+2 \geq 0$ (ssi) $x\geq -2$.

Par conséquent, le domaine de définition de f est $D_f =]-2\,;+\infty[$.

Exemple 5.

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{3x^2-6}$.

$f(x)$ contient une ***expression sous la racine carrée***. Donc, il faut chercher et exclure les valeurs interdites (v.i.) qui rendent négative cette expression, ***ou bien*** chercher directement les valeurs pour lesquelles cette expression est positive ou nulle.

Soit $x\in\mathbb{R}$. $x\in D_f$ (ssi) $3x^2-6\geq 0$

On obtient une inéquation du second degré que nous savons résoudre.

On cherche les solutions de l'équation $3x^2-6=0$ et on applique le théorème sur le signe d'un trinôme du second degré.

On peut calculer le discriminant Δ, ***ou bien*** on peut aussi factoriser l'expression :

$$x\in D_f \text{ (ssi) } 3x^2-6\geq 0 \text{ (ssi) } 3(x^2-2)\geq 0$$
$$\text{(ssi) } x^2-2\geq 0 \text{ (ssi) } (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\geq 0$$

Les racines sont donc $x_1=-\sqrt{2}$ et $x_2=\sqrt{2}$.

Or, on sait que : « un trinôme du second degré " ax^2+bx+c "est du signe de a à l'extérieur des racines ». Donc

$$3x^2-6\geq 0 \text{ (ssi) } x\leqslant -\sqrt{2} \text{ ou } x\geqslant \sqrt{2}$$

Conclusion. Le domaine de définition de f est : $D_f =]-\infty\,;-\sqrt{2}\,]\cup[\,\sqrt{2}\,;+\infty[$. (les bornes sont comprises).

Remarque. Pour la fonction définie par $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2-2}}$ les bormes seront exclues car la racine carrée est aussi au dénominateur, donc les deux conditions doivent être vérifiées. On trouvera :

$$D_f =]-\infty\,;-\sqrt{2}\,[\cup]\,\sqrt{2}\,;+\infty[.$$

1.2) Courbe représentative

La « ***représentation graphique*** » ou « ***courbe représentative*** » de f dans un repère donné (orthonormé ou non) est l'ensemble de tous les points M de coordonnées $(x\,;f(x))$ où $x\in D$.

On note souvent C_f la représentation graphique de la fonction f :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ [$M(x, y) \in C_f$ si et seulement si $x \in D_f$ et $y = f(x)$]

Exemple 6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 5x + 3$.

Les points A(–1; 9) et B(2 ; –7) appartiennent-ils à la courbe C_f ?

1. Pour le point A : je calcule $f(-1)$ et je compare à 9 :

   $f(-1) = (-1)^2 - 5 \times (-1) + 3 = 1 + 5 + 3 = -9$ Donc $A \in C_{f.}$

2. Pour le point B : je calcule $f(2)$ et je compare à – 7 :

   $f(1) = 1^2 - 5 \times 1 + 3 = 1 - 5 + 3 = -3 \neq -7$. Donc $B \notin C_{f.}$

1.3) Comparaison de deux fonctions

Définition 3.

Soit I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
Soient f et g deux fonctions définies sur I. On dit que :

- ***f* est *supérieure à g* sur *I*** lorsque la courbe de f est située au-dessous de la courbe g sur I, c'est-à-dire lorsque :

  pour tout $x \in I$: [$f(x) \geq g(x)$]

  ou encore : pour tout $x \in I$: [$f(x) - g(x) \geq 0$]

  On note alors : $f \geq g$ sur I.

- En particulier : ***f* est *positive* sur *I*** lorsque sa courbe est située au-dessus de l'axe des abscisses ; c'est-à-dire lorsque :

  pour tout $x \in I$: [$f(x) \geq 0$]

  On note : $f \geq 0$ sur I.

Exemple 6.

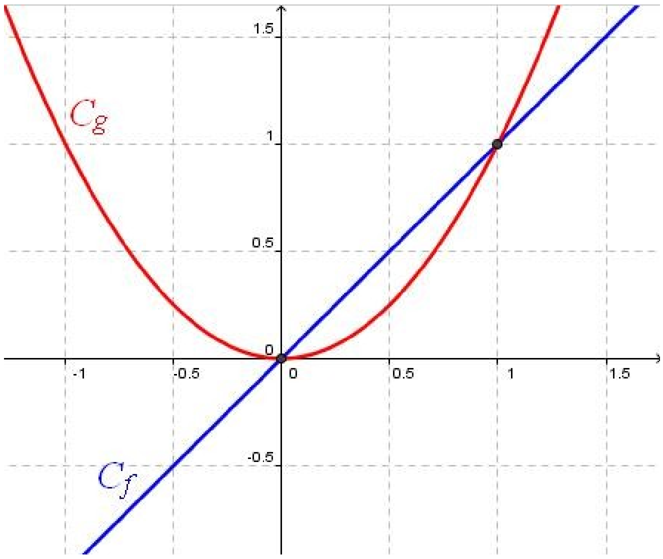
Comparer les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.

Pour cela, nous allons étudier le le signe de la différence $f(x) - g(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) - g(x) = x - x^2 = x(1 - x)$.
Nous avons deux racines 0 et 1. Donc, d'après le théorème, « le trinôme est du signe de $a = -1$, à l'extérieur des racines ».

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - g(x) < 0$ (ssi) $f(x) < g(x)$ (ssi) $x \in]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$.
Donc : $f < g$ sur $]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$

De même : $f(x) - g(x) > 0$ (ssi) $f(x) > g(x)$ (ssi) $x \in]0 ; 1[$.
Donc : $f > g$ sur $]0 ; 1[$

Illustration graphique :



1.4) Sens de variation d'une fonction

Définition 4a.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur I. On dit que :
f* est croissante sur *I lorsque :
pour tous a et b dans I : Si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$
f* est strictement croissante sur *I lorsque :
pour tous a et b dans I : Si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$
On dit que la fonction ***f* conserve le sens des inégalités**.

Définition 4b.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur I. On dit que :
f* est décroissante sur *I lorsque :
pour tous a et b dans I : **Si** $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$
f* est strictement décroissante sur *I lorsque :
pour tous a et b dans I : Si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$
On dit que la fonction ***f* change le sens des inégalités**.

Définition 4c.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur I. On dit que :
f est ***monotone*** sur I si f est croissante sur I ou décroissante sur I.
f est ***strictement monotone*** sur I si f est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

La fonction carrée est strictement monotone (ici décroissante) sur $]-\infty\,;0\,[$ et strictement monotone (ici croissante) sur $]0;+\infty[$.

II. Les fonctions de référence

En classe de seconde, nous avons étudié le sens de variation de certaines fonctions de référence suivantes : les ***fonctions linéaires*** définies par : $f(x)=ax$, les ***fonctions affines*** : $f(x)=ax+b$, où a et b sont des nombres réels donnés ; ***la fonction carrée*** : $f(x)=x^2$ et ***la fonction inverse*** : $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les propriétés importantes de ces fonctions et donner le sens de variation de nouvelles fonctions de référence : ***la fonction racine carrée*** : $f(x)=\sqrt{x}$ et ***la fonction cube*** : $f(x)=x^3$.

2.1) Fonctions affines, fonctions linéaires (Seconde)

Définition 1.

Une ***fonction affine*** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ax+b$ où a et b sont deux nombres réels donnés.

En particulier : Si $b=0$, alors : $f(x)=ax$ et f s'appelle une ***fonction linéaire***.

a s'appelle le ***coefficient*** de la fonction affine ou linéaire;

b s'appelle le ***terme constant*** de la fonction affine ou linéaire.

Exemple 1.

- La fonction définie par $f(x)=-3x+5$ est une fonction affine de coefficient -3 et de terme constant 5. Elle n'est pas linéaire.
- La fonction définie par $f(x)=\dfrac{-3}{5}x$ est une fonction linéaire de coefficient $\dfrac{3}{5}$.
- La fonction définie par $f(x)=-2x^2+5$ n'est ni affine, ni linéaire.

Sens de variation

Théorème 1.

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ax+b$ où a et b sont deux nombres réels donnés. Alors :

- Si a est positif, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- Si a est négatif, alors la fonction f est strictement décroissante $\mathbb{R}$;
- Si $a=0$, alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Tableaux de variations

$a>0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-$	$\nearrow$	$+$

$a<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$+$	$\searrow$	$-$

$a=0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\rightarrow$	

Comment reconnaître la représentation graphique d'une fonction affine ?

Théorème 2.

La représentation graphique d'une fonction affine (ou linéaire) définie par :
$f(x)=ax+b$ est une droite D non parallèle à (Oy) et **a pour équation :**

$$y=ax+b.$$

Réciproquement, toute droite D non parallèle à (Oy) est la réprésentation graphique d'une fonction affine (ou linéaire).

Définition 2.

a s'appelle le ***coefficient directeur*** de la droite D
b s'appelle ***l'ordonnée à l'origine*** de la droite D. $b = f(0)$. $B(0\,;\,b) \in D$.

Comment calculer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine ?

Théorème 3.

Soit f une fonction affine (ou linéaire) définie par : $f(x)=ax+b$.
Soient $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ deux points de la droite D. Alors :

$$y_A=f(x_A) \quad \text{et} \quad y_B=f(x_B)$$

1°) Le coefficient directeur ***a*** est donné par :

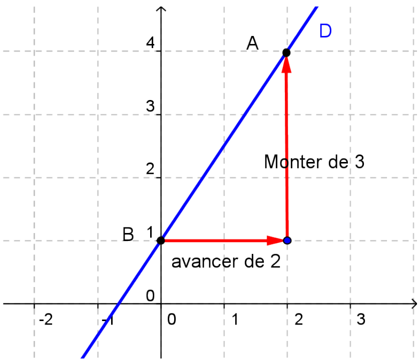
$$a=\frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A} \quad \text{ou encore} \quad a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{Accroissement\ vertical}{Accroissement\ horizontal}$$

2°) Une fois calculé a, on calcule b de la manière suivante :

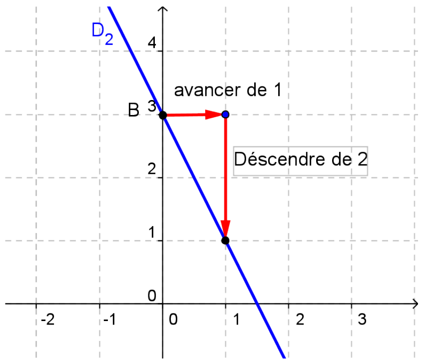
$$b=y_A-a\,x_A \quad \text{ou encore} \quad b=y_B-a\,x_B\ .$$

Exemples 2.

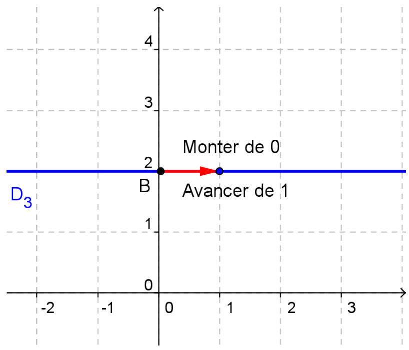
Déterminer graphiquement le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine



Coefficient directeur $a=\frac{3}{2}$
Ordonnée à l'origine $b=1$
Donc $f(x)=\frac{3}{2}x+1$



Coefficient directeur $a=\frac{-2}{1}$
Ordonnée à l'origine $b=3$
Donc $f(x)=-2x+3$



Coefficient directeur $a=0$
Ordonnée à l'origine $b=2$
Donc $f(x)=2$ constante

Exemple 3.

Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine f telle que : $f(3) = 3$ et $f(6) = 1$.

Soit f la fonction affine définie par : $f(x)=ax+b$, et D sa représentation graphique :

1°) **Recherche du coefficient directeur *a*** :

Ici on a : $x_1 = 3$ et $x_2 = 6$

On sait que $a=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{1-3}{6-3}=\dfrac{-2}{3}$ donc $a=\dfrac{-2}{3}$ ou $a=-\dfrac{2}{3}$

2°) **Calcul de l'ordonnée à l'origine *b***.

Comme $f(3) = 3$, le point A(3 ; 3) $\in$ D. Donc : $\boldsymbol{y_A = ax_A+b}$. Donc $\boldsymbol{b = y_A - ax_A}$.

On remplace et on obtient : $b=3-\dfrac{-2}{3}\times 3=3+2=5.$

Ce qui donne : $b = 5$.

Conclusion : L'expression de la fonction affine f est : $f(x)=-\dfrac{2}{3}x+5.$

Comment déterminer le signe d'une fonction affine ?

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ax+b$.

Nous utilisons deux méthodes : ***la méthode algébrique*** et/ou ***la méthode graphique***.

On cherche d'abord l'abscisse du point où la droite coupe l'axe des abscisses. Pour cela, on résout l'équation :

$f(x) = 0$. Ce qui équivaut à $[a\,x+b = 0]$ donc à $[a\,x = -b]$ donc à $x=\dfrac{-b}{a}$.

On obtient une ***valeur remarquable*** $x=\dfrac{-b}{a}$. On a donc :

***a* > 0** (f est croissante passe du – vers +)

x	$-\infty$	$\dfrac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	–	0	+

Pour tout $x < \dfrac{-b}{a}$ $f(x) < 0$

Pour tout $x > \dfrac{-b}{a}$ $f(x) > 0$

***a* < 0** (f est décroissante passe du + vers –)

x	$-\infty$	$\dfrac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	–

Pour tout $x < \dfrac{-b}{a}$ $f(x) > 0$

Pour tout $x > \dfrac{-b}{a}$ $f(x) < 0$

2.2) Étude de la fonction carrée (Seconde)

Définition 3.

La ***fonction carrée*** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2$

Exemple 4.

- *L'image* de – 3 par la fonction carrée est : $f(-3)=(-3)^2=9$.
- Pour déterminer *les antécédents* de 5, on résout une équation : $f(x)=5$.

Ce qui équivaut à $x^2=5$

On passe tout à gauche : $x^2-5=0$.

On transforme en I.R. : $x^2-(\sqrt{5})^2=0$

On factorise : $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=0$

Donc, d'après le Théorème du produit nul, on obtient $x-\sqrt{5}=0$ ou $x+\sqrt{5}=0$

D'où : $x=\sqrt{5}$ ou $x=-\sqrt{5}$. Donc cette équation admet deux solutions : $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$. On écrit : $S=\{-\sqrt{5}\ ;\ \sqrt{5}\}$. Ce qui donne :

Conclusion. 5 admet *deux antécédents* par la fonction carrée qui sont $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.

Sens de variation

Théorème 4.

La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Théorème 5.

Pour tous nombres réels a et b, on a :

1°) Si $0\leqslant a\leqslant b$ alors $a^2\leqslant b^2$ et 2°) Si $a\leqslant b\leqslant 0$ alors $a^2\geqslant b^2$

Autrement dit :

1°) Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre ;

2°) Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire.

Représentation graphique

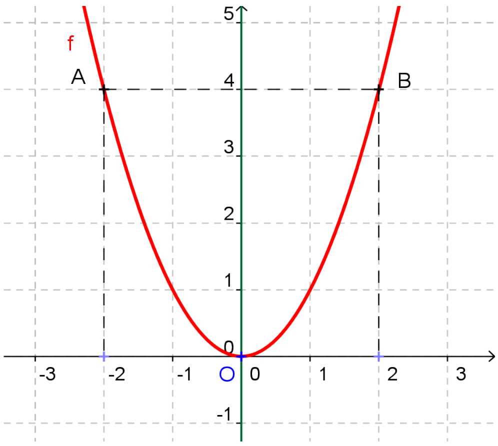
Définition 4.

Dans un repère du plan, la représentation graphique de ***la fonction carrée*** est une courbe appelée ***parabole*** de ***sommet O***, l'origine du repère.

Théorème 5.

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), la courbe représentative de la fonction carrée est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées Oy.

On dit que la parabole admet un ***axe de symétrie Oy***.



2.3) La fonction inverse *(Seconde)*

Définition 2.

La ***fonction inverse*** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Exemple 6.

- *L'image* de – 3 par la fonction inverse est : $f(-3)=\dfrac{1}{-3}=\dfrac{-1}{3}$.

- *L'image* de $\dfrac{-2}{5}$ par la fonction inverse est : $f\left(\dfrac{-2}{5}\right)=\dfrac{1}{\dfrac{-2}{5}}=\dfrac{-5}{2}$

- Pour déterminer *le* (ou *les*) *antécédents* de 5, on résout une équation : $f(x)=5$.

Ce qui équivaut à : $\dfrac{1}{x}=5$.

Cette équation a une valeur interdite $x = 0$. On écrit l'égalité des produits en croix : $5x=1$. Puis, on divise les deux côtés par 5 : $x=1/5$

Donc cette équation admet une seule solution : $x=\dfrac{1}{5}$. On écrit $S=\left\{\dfrac{1}{5}\right\}$.

Conclusion. 5 admet *un seul antécédent* par la fonction inverse qui est $\dfrac{1}{5}$.

Sens de variation

Théorème 6.

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Tableaux de variation

(Il y a une valeur interdite en 0, d'où la double barre !).

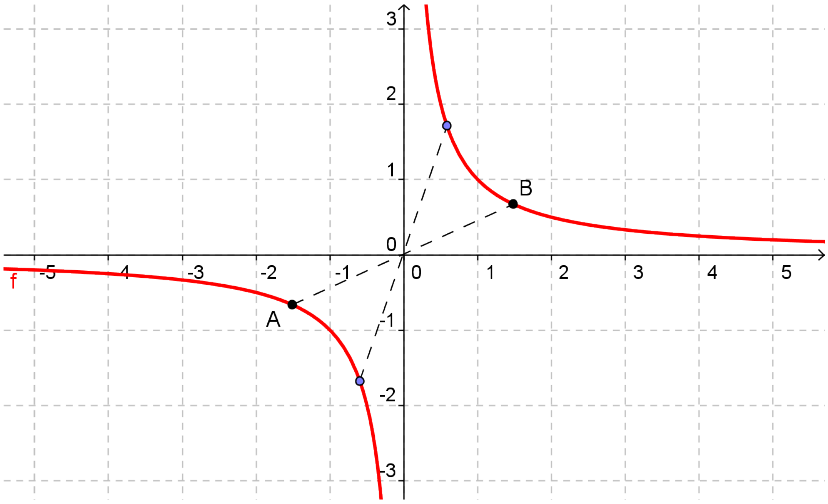
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

Représentation graphique

Définition 6.

Dans un repère du plan, la représentation graphique de la ***fonction inverse*** est une courbe appelée une ***hyperbole*** de ***centre O***, origine du repère.

Remarque. On peut remarquer au passage que, dans un repère quelconque, la représentation graphique de la fonction inverse n'est pas une droite, donc *la fonction inverse n'est ni affine, ni linéaire.*



Théorème 5.

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), la courbe représentative de la fonction inverse est ***symétrique par rapport à l'origine O*** du repère.
On dit que l'hyperbole admet un ***centre de symétrie O.***

2.4) Étude de la fonction racine carrée (1ère ES)

a) Domaine de définition

Tout nombre positif ou nul x admet une racine carrée notée $\sqrt{x}$. C'est le nombre positif ou nul dont le carré est égal à x. Le domaine de définition de la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{x}$ est donc $D_f = [0 ; +\infty[$.

Définition 6.

La ***fonction racine carrée*** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $f(x)=\sqrt{x}$

Exemple 7.

- – 3 n'a ***pas d'image*** par la fonction racine carrée, car la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.
- *L'image* de 4 par la fonction racine carrée est égale à 2, car $\sqrt{4}=2$.
- 4 admet un seul antécédent par la fonction racine carrée : 16, car $\sqrt{16}=4$.

b) Sens de variation

Théorème 1.

La fonction $f : x \to \sqrt{x}$ définie sur [0 ; +∞ [, est ***strictement croissante*** sur son domaine de définition $D_f = [0 ; +\infty[$.

Soit a et $b \in [0 ; +\infty[$.
Supposons que $a < b$. Donc $0 \leq a < b$. Donc $\boldsymbol{a - b < 0}$.
Comme $u \geqslant 0$ on a $\sqrt{u} \geqslant 0$ et comme $b > a$, on $\sqrt{b} > 0$ donc $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$ donc ≠0.

On a alors, en multipliant par l'expression conjuguée (I.R. N°3) :

$$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{a - b}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})} < 0.$$

En effet, par hypothèse $a - b < 0$ et $\sqrt{u} + \sqrt{v} > 0$, le dernier quotient est négatif.
Donc $f(a) - f(b) < 0$. Par conséquent, $\boldsymbol{f(a) < f(b)}$.

Conclusion . La fonction $f : x \to \sqrt{x}$ est strictement croissante sur [0 ; +∞ [.

c) Tableau de variations

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	↗

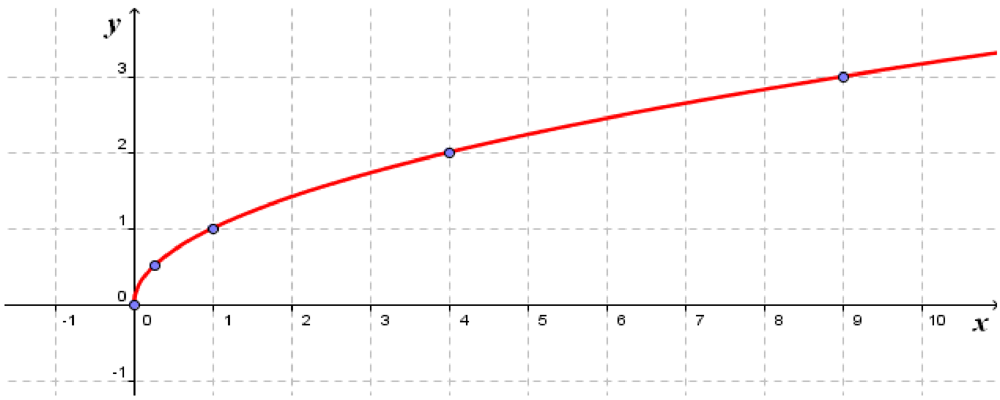
d) Tableau de valeurs

Un tableau de quelques valeurs permet la construction de la courbe :

x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3

e) Tracé de la courbe représentative

Dans un repère orthonormé (O, I, J) on a :

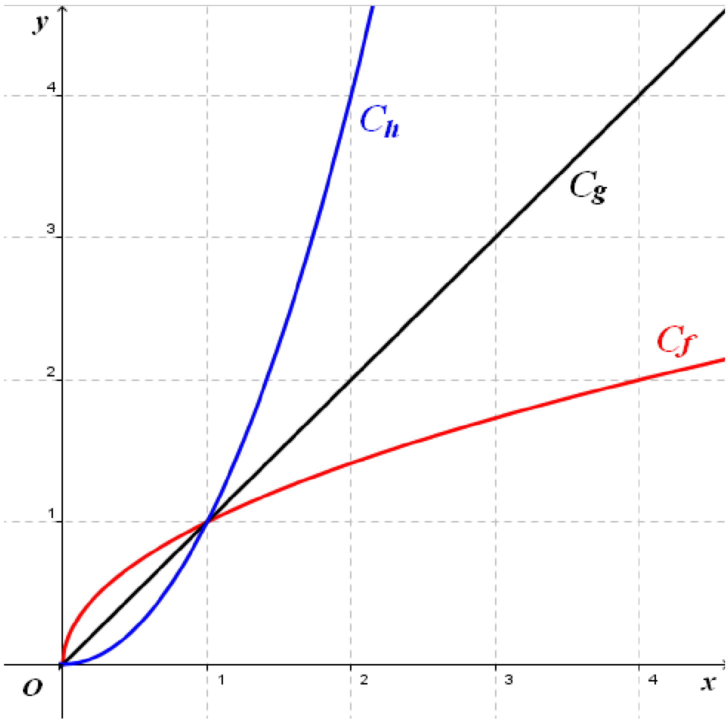


2.5°) Comparaison des fonctions √(x), x et x²

Sur l'intervalle [0 ; +∞ [, on considère les trois fonctions *f* , *g* et *h* définies par :

$$f(x)=\sqrt{x} \quad , \quad g(x)=x \quad \text{et} \quad h(x)=x^2$$

Ces trois fonctions sont strictement croissantes sur [0 ; +∞ [.
On peut faire une étude algébrique comparative deux à deux de ces trois fonctions. (voir ci-dessous). Nous pouvons également les comparer graphiquement.



On peut résumer graphiquement la situation de la manière suivante :

- Pour tout $x \in [0\,;1]$. $0 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$. Donc, $h \leqslant g \leqslant f$ sur [0 ;1].
- Pour tout $x \in [1;+\infty[$: $1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2$. Donc, $f \leqslant g \leqslant h$ sur [1; +∞ [.

Remarque : La courbe C_f est le symétrique de la courbe C_h par rapport à la droite C_g.
La droite C_g d'équation « ***y = x*** » s'appelle ***la première bissectrice***.

Étude algébrique comparative

Nous avons déjà vue une première méthode (page 4). Voici une deuxième méthode :

1°) Sur [0 ;1]

On sait que pour tout $x \in [0\,;1]$: $0 \leqslant x \leqslant 1$
Comme *x* est positif ou nul et on ne change pas le sens d'une inégalité en multipliant par un nombre positif, on obtient : $0 \times x \leqslant x \times x \leqslant 1 \times x$ donc : $0 \leqslant x^2 \leqslant x$
Et comme $0 \leqslant x \leqslant 1$ on obtient : $0 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant 1$ (1).

D'autre part, on sait que la fonction racine carrée est croissante sur [0;+∞[. Donc :
Si $0\leqslant x\leqslant 1$ alors $0\leqslant\sqrt{x}\leqslant\sqrt{1}$. Donc $0\leqslant\sqrt{x}\leqslant 1$ (2).
Maintenant, en multipliant par $\sqrt{x}$ qui est un nombre positif, on obtient :
$0\times\sqrt{x}\leqslant\sqrt{x}\times\sqrt{x}\leqslant 1\times\sqrt{x}$. Ce qui donne : $0\leqslant x\leqslant\sqrt{x}$ (3).

Finalement, en regroupant les trois double-inégalités, on obtient :
pour tout $x\in[0\,;1]$: $0\leqslant x^2\leqslant x\leqslant\sqrt{x}\leqslant 1$. D'où le résultat sur [0 ;1] .

2°) Sur [1 ; + ∞ [

Démonstration analogue.

2.6) La fonction cube

a) Définition et une première propriété

Définition 3.

La ***fonction cube*** est la fonction f définie sur IR par : $f(x)=x^3$

Exemple 4.

- *L'image* de – 3 par la fonction cube est : $f(-3)=(-3)^3=-27.$
- L'image de $\sqrt{2}$ par la fonction carrée est :

$$f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^3=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}\ .$$

Propriété.

Pour tous nombres réels a et b, on a : $\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$. IR n°4.

Démonstration.

Pour démontrer cette identité, il suffit de développer le membre de droite pour trouver celui de gauche. On a alors :

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a\times a^2+a\times ab+a\times b^2-b\times a^2-b\times ab-b\times b^2\\ &= a^3+a^2b+ab^2-ba^2-ab^2-b^3\\ &= a^3+a^2b+ab^2-ba^2-ab^2-b^3\\ &= a^3-b^3.\end{aligned}$$

D'où Pour tous nombres réels a et b : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

b) Sens de variation

Théorème 4.

La fonction cube est strictement croissante sur IR, c'est-à-dire sur] – ∞ ; + ∞ [.

Démonstration.

1°) Sur $]-\infty ; 0]$:

Soient a et b deux nombres réels quelconques négatifs. Supposons que $a < b$.
Donc $a < b \leqslant 0$. On a aussi : $ab > 0$ (car a et b sont négatifs).
Mais alors : $f(a) - f(b) = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ d'après l'IRn°4 ci-dessus.
Or $a < 0$ et $b < 0$. Donc $ab > 0$
Mais alors $a^2+ab+b^2 > 0$, comme somme de termes tous positifs.
Donc $f(a) - f(a) > 0$. Et par suite : $f(a) > f(b)$.
f change le sens des inégalités. Par conséquent f est strictement décroissante $]-\infty ; 0]$.

2°) Sur $[0 ; +\infty[$

démonstration analogue.

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Théorème 5.

Pour tous nombres réels a et b, on a :

Si $a \leqslant b$ alors $a^3 \leqslant b^3$

Démonstration.
Immédiat, d'après ce qui précède.
La fonction cube étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, si $a \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$
et par suite : $a^3 \leqslant b^3$.

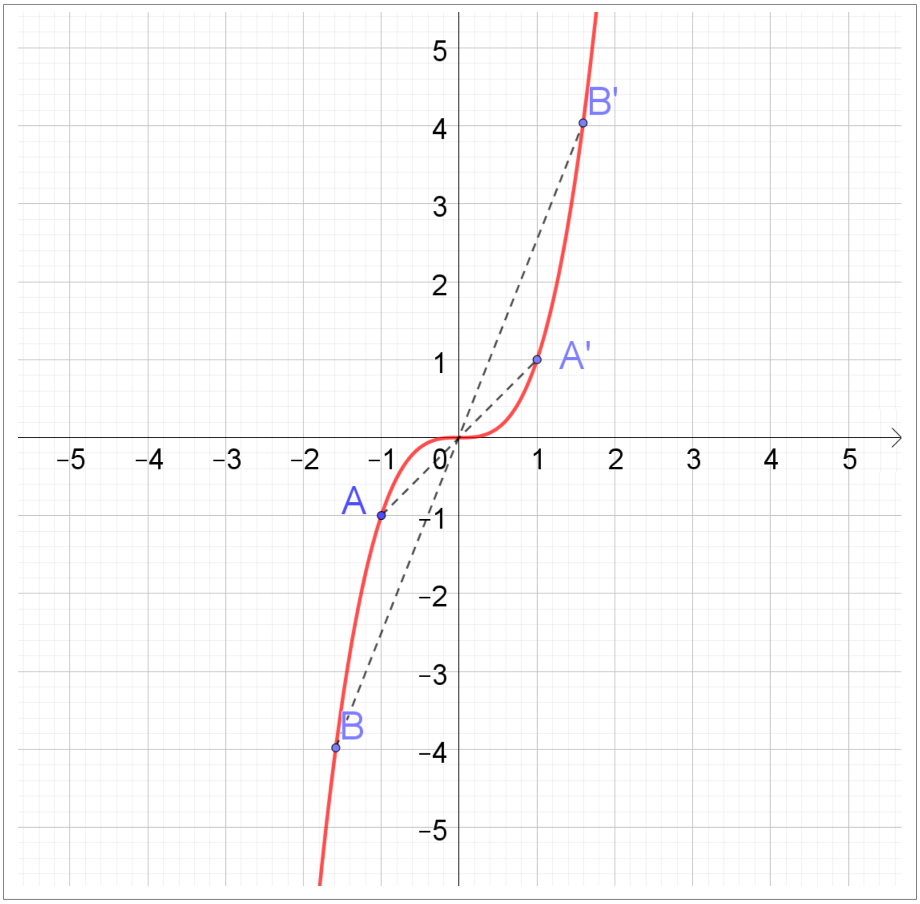
2.3) Représentation graphique

Théorème 5.

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), la courbe représentative de la fonction cube est ***symétrique par rapport à O***, origine du repère.

On dit que la parabole admet un ***centre de symétrie en O***.

Démonstration.
En effet pour tout nombre réel x, on a : $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.
Donc les nombres x et $-x$ ont des images opposées.



Si $M(x\,;f(x))\in C_f$, alors $M(-x\,;-f(x))\in C_f$,
Donc les points M et M' sont symétriques par rapport à l'origine O du repère.

2.4) Applications

<u>Exemple 5</u>. 1°) Dans chacun des cas suivants, comparer les carrés des nombres donnés sans utiliser la calculatrice :

a) π et 3,14. b) $\dfrac{-2}{3}$ et $\dfrac{-5}{6}$ c) $\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{2}$.

b) Donnez le meilleur encadrement possible de $5a^2$ sachant que : $-3\leqslant a<-2$.

c) Étudier les variations des fonctions suivantes sur $]-\infty;0]$ puis sur $[0\,;+\infty[$:

$f(x)=x^2-2$; $g(x)=-x^2$; $h(x)=-x^2+3$; $k(x)=2x^2$ et $m(x)=(x-2)^2$