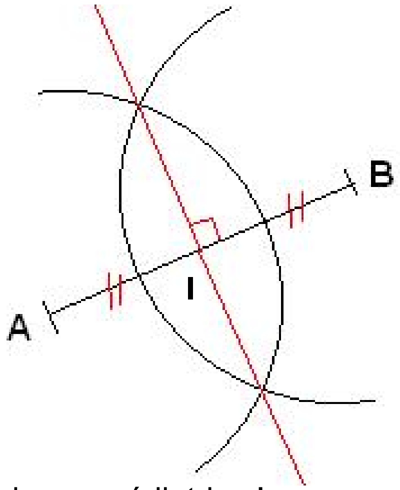
Chapitre 4

Les théorèmes de la droite des milieux

Théorème de Thalès

I. Milieu d'un segment



Définition : Le point I est le milieu du segment [AB] signifie que

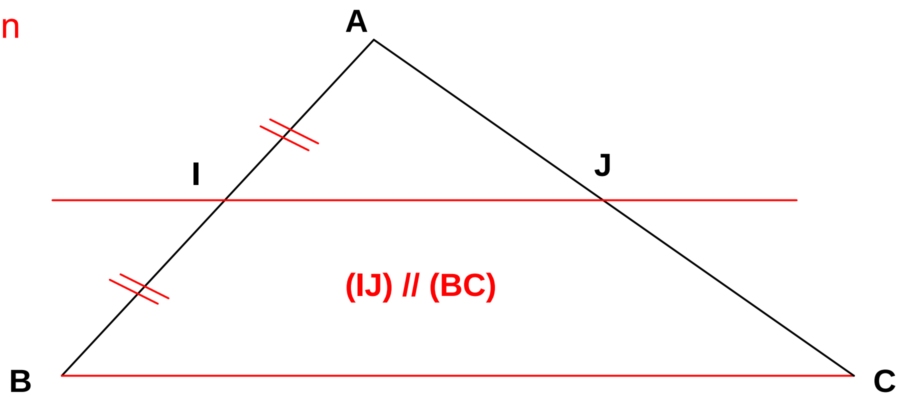
$\begin{cases}\text{les points A, I et B sont alignés dans cet ordre} \\ \text{et I est équidistant de A et de B.}\end{cases}$

Autremement dit : $\boxed{I \in [AB] \text{ et } AI = IB.}$

Pour construire le milieu d'un segment, il suffit de construire sa médiatrice !

II. Droite des milieux

1ère situation

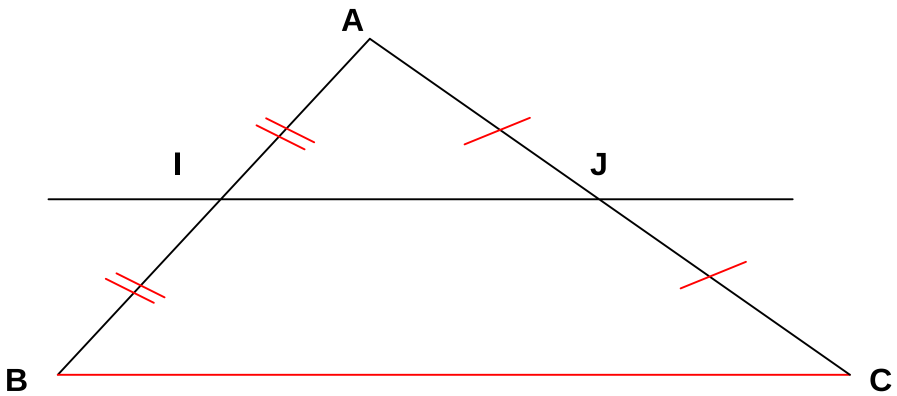


Théorème n°1 : Dans un triangle quelconque, Si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, alors elle coupe le troisième en son milieu.

Avec des symboles :

Si I est le milieu de [AB] et (IJ) // (BC), **alors** J est le milieu de [AC]

2ème situation



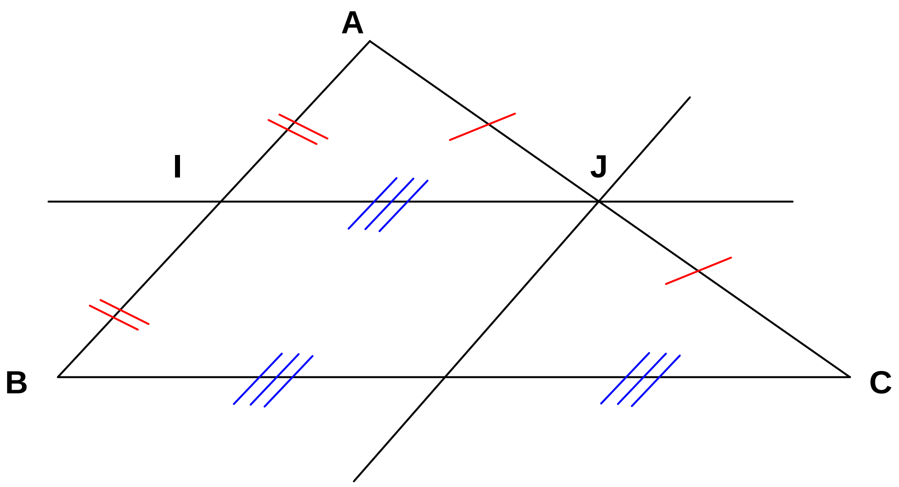
Propriété réciproque :

Théorème n°2 : Dans un triangle quelconque, Si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.

Avec des symboles :

Si I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AC] alors (IJ) // (BC)

3ème situation



Conséquence :

Théorème n°3 : Dans un triangle quelconque, la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

Avec des symboles :

Si I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AC] alors IJ = $\frac{1}{2} \times$ BC

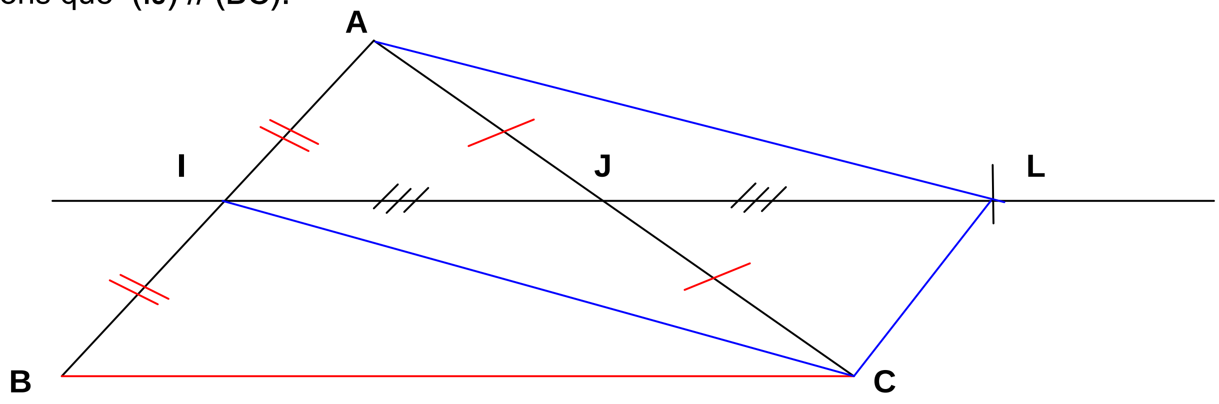
Démonstration du théorème 2.

Hypothèses : 1°) ABC est un triangle quelconque ;

2°) I est le milieu de [AB] ;

3°) J est le milieu de [AC].

Montrons que (IJ) // (BC).



On construit un point L, symétrique de I par rapport à J. Donc J est le milieu de [IL].

Or, par hypothèse, J est aussi le milieu de [AC].

Par conséquent, le quadrilatère AICL est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leurs milieux. Donc, en particulier, on en déduit que :

$$\boxed{AI = LC \text{ et } (AI) // (LC)}$$

Or, par hypothèse I est aussi le milieu du côté [AB]. Donc AI = IB

$$\boxed{IB = LC \text{ et } (IB) // (LC)}$$

Par conséquent, le quadrilatère IBCL est aussi un parallélogramme ; car il a deux côtés opposés parallèles et de même longueur. Donc, en particulier :

(IL) // (BC) et IL =BC
Donc (IJ) // (BC)

Conclusion : Les deux droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

CQFD

Démonstration du théorème 3.

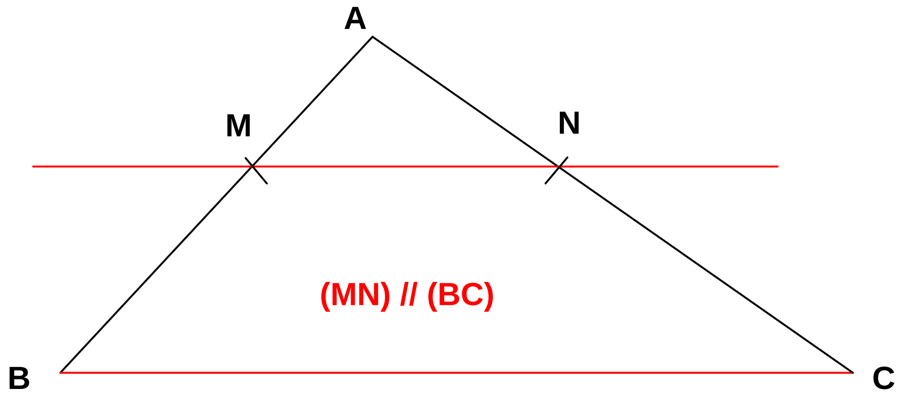
D'après ce qui précède, on sait que IJ = $\frac{1}{2}$ x IL et IL = BC, donc, on peut en déduire que :

$$\boxed{IJ = \frac{1}{2} \times BC}$$

Ce qui montre le théorème 3. CQFD

III. Le théorème de Thalès dans le triangle

Activité



Construire un triangle quelconque ABC assez grand. Placer un point M sur le côté [AB] (pas forcément au milieu). La droite parallèle à (BC) passant par M coupe le côté [AC] en N. On a donc les (hypothèses) données suivantes :

M $\in$ [AB] ; N $\in$ [AC] et (MN) // (BC).

Mesurer les longueurs AM, AB, AN, AC, MN, BC, puis calculer les rapports au dixième près :
$\frac{AM}{AB}$=…, $\frac{AN}{AC}$=… et $\frac{MN}{BC}$=… Que constate-t-on ?

Théorème de Thalès dans le triangle

Théorème n°4 : Dans un triangle ABC quelconque, **si** M est un point du côté [AB] et N est un point du côté [AC] et si les deux droites (MN) et (BC) sont parallèles, **alors** il y a égalité des trois rapports :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

Avec des symboles :

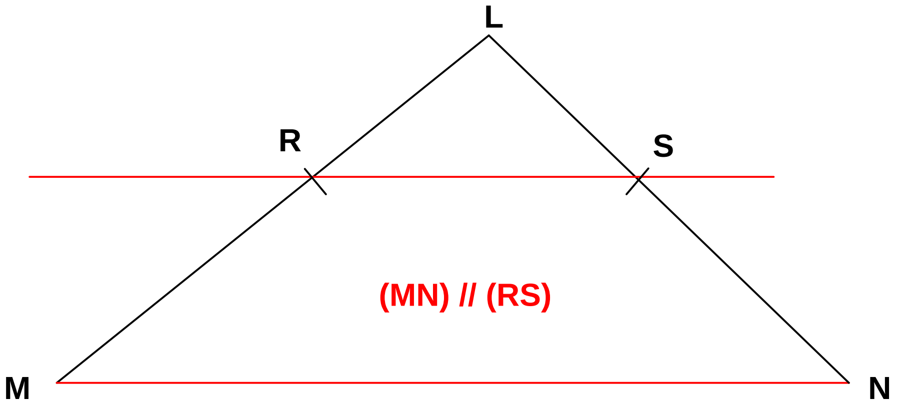
Si M $\in$ [AB] , N $\in$ [AC] et (MN) // (BC) alors $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

Autrement dit :

Théorème n°4 bis : Dans un triangle ABC quelconque, **si** M est un point du côté [AB] et N est un point du côté [AC] et si les deux droites (MN) et (BC) sont parallèles, **alors** les longueurs des côtés correspondants des deux triangles AMN et ABC sont proportionnelles.

Exemple : LMN est un triangle tel que LM = 10cm, LN = 8cm et MN = 12cm.

On place le point S sur le côté [LN] tel que LS = 3cm, puis le point R sur le côté [LM] tel que les droites (RS) et (MN) soient parallèles. Calculer LR puis RS. Justifier votre réponse.



<u>Modèle de rédaction :</u>

Dans le triangle LMN, R est un point du côté [LM], S est un point sur le côté [LN] et les droites (RS) et (MN) soient parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thalès, on a égalité des trois rapports :

$$\frac{LR}{LM}=\frac{LS}{LN}=\frac{RS}{MN}$$

Avec les valeurs : $\frac{LM}{10}=\frac{3}{8}=\frac{RS}{12}$

1°) <u>Calcul de LM</u>

Je garde $\frac{LM}{10}=\frac{3}{8}$

J'écris l'égalité des produits en croix : $LM\times 8=10\times 3$

Je divise les deux côtés par 8 et je simplifie : $\frac{LM\times\cancel{8}}{\cancel{8}}=\frac{10\times 3}{8}$

J'obtiens : LM = $\frac{30}{8}$

Donc $\boxed{\text{LR = 3,75 cm}}$

1°) <u>Calcul de RS</u>

Je garde $\frac{3}{8}=\frac{RS}{12}$

J'écris l'égalité des produits en croix : $8\times RS=3\times 12$

Je divise les deux côtés par 8 et je simplifie : $\frac{\cancel{8}\times RS}{\cancel{8}}=\frac{3\times 12}{8}$

J'obtiens : LM = $\frac{3\times\cancel{4}\times 3}{\cancel{4}\times 2}$

Donc $\boxed{\text{RS = 4,5 cm.}}$

IV. Agrandissement – Réduction.

Agrandir, c'est multiplier toutes les dimensions par un même nombre $k \neq 0$ avec $k > 1$, en conservant la forme de la figure.

Réduire c'est multiplier toutes les dimensions par un même nombre $k \neq 0$ avec $0 < k < 1$, en conservant la forme de la figure.

Définition : Si deux figures ont la même forme et des longueurs proportionnelles, on dit que l'une est un agrandissement ou une réduction de l'autre.

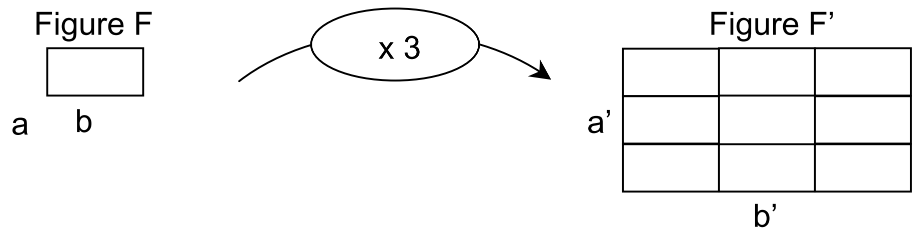
Remarques :

1°) Dans un agrandissement ou une réduction, les mesures des angles, la perpendicularité et le parallélisme sont conservés.

2°) Naturellement, si on peut multiplier toutes les dimensions par k dans un sens, on peut toutes les diviser par k pour revenir dans l'autre sens !

3°) Si **k** est le coefficient de proportionnalité des longueurs de la figure F à la figure F', alors :

- Si $k > 1$, la figure F' est un agrandissement de la figure F ;
- Si $0 < k < 1$, la figure F' est une réduction de la figure F.



Les deux figures sont des rectangles (de même forme) et les dimensions de la figure F' s'obtiennent en multipliant les dimensions de la figure F par **k** = 3. Il s'agit d'un agrandissement.

Propriété :

Lorsqu'on agrandit ou on réduit une figure, si les dimensions sont (toutes) multipliées par un même nombre k, en conservant la même forme, alors **le périmètre P est multiplié par k** et **l'aire est multipliée par k²**.

$\boxed{P' = k \times P}$ et $\boxed{A' = k^2 \times A}$