Chapitre 3

Nombres en écriture fractionnaire

1. Définitions

1.1.Quotient exact

Définition 1 : Le quotient exact de la division du nombre a par le nombre non nul b s'écrit sous forme fractionnaire : $\frac{a}{b}$ (a est le numérateur, b est le dénominateur).

Définition 2 : Si a et b sont des entiers relatifs (b non nul), on dit que $\frac{a}{b}$ est une fraction.

Exemples : $\frac{8}{5}$ et $\frac{4}{7}$ sont des fractions, mais $\frac{2,3}{6}$ n'est pas une fraction, mais un nombre en écriture fractionnaire.

1.2. Écriture décimale. Quotient approché

- Lorsque la division de a par b s'arrête, le quotient exact a une écriture décimale limitée ; c'est un nombre décimal. Par exemple, $\frac{8}{5} = 1,6$
- Lorsque la division de a par b ne s'arrête pas, le quotient exact a une écriture décimale illimitée ; ce n'est pas un nombre décimal.

  Par exemple, $\frac{4}{7} = 0,571428571428571...$ Donc le quotient exact n'a pas d'écriture décimale. On garde l'écriture fractionnaire pour représenter le quotient exact.
- Le quotient approché de 4 par 7 arrondi au centième près est $\frac{4}{7} \simeq 0,57$.
- On obtient l'encadrement du quotient approché de 4 par 7 au centième près :

$$0,57 < \frac{4}{7} < 0,58$$

- 0,57 est le quotient approché de 4 par 7 au centième près par défaut et 0,58 est le quotient approché de 4 par 7 au centième près par excès.

Remarque : Les nombres fractionnaires ($\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers, b non nul) ont une écriture décimale périodique. Ils sont bien « rangés », bien « organisés », on dit que ce sont des *nombres rationnels*. Réciproquement, on démontre que tous les nombres ayant une écriture décimale périodique, sont nécessairement des fractions.

2. Egalité des fractions

2.1. Fractions égales

Règle 1 : Deux fractions sont égales lorsqu'il y a égalité des produits en croix.

Autrement dit :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ équivaut à } a\times d=b\times c$$

Règle 2 : On ne change pas un nombre relatif en écriture fractionnaire en multipliant (ou en divisant) son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

Autrement dit, pour tout nombre relatif a et tous nombres relatifs non nuls b et k, on a :

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times k}{b\times k} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b}=\frac{a\div k}{b\div k}$$

Ceci nous permet d'obtenir différentes écritures fractionnaires d'un même nombre. On cherche alors la fraction la plus simple.

Exemples : A $=\frac{4}{3,5}=\frac{4\times 10}{3,5\times 10}=\frac{40}{35}=\frac{40\div 5}{35\div 5}=\frac{8}{7}$

$\frac{8}{7}$ est une fraction simple ou irréductible.

2.2. Règle des signes

Règle 2 : Le signe du quotient $\frac{a}{b}$ de deux nombres relatifs est le même que le signe du produit ab.

On obtient la règle des signes :

Le quotient de deux nombres de même signe est positif.

Le quotient de deux nombres de signes contraires est négatif.

$$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$$

3. Comparaison des fractions

Règle 3 : 1°) Si deux fractions ont le même dénominateur positif, alors on les range dans le même ordre que leurs numérateurs. Autrement dit, pour tous nombres relatifs a et c et tout nombre relatif d > 0, on a :

$$\boxed{\frac{a}{d} > \frac{c}{d} \quad \text{équivaut à} \quad a > c}$$

2°) Si deux fractions n'ont pas le même dénominateur positif, on cherche d'abord un dénominateur commun positif, puis on applique le 1°).

Exemple : Comparer $\frac{-5}{8}$ et $\frac{-7}{12}$.

On est dans le 2ème cas. On cherche un dénominateur commun.

On cherche dans la table de 8, le premier nombre multiple de 12, ou l'inverse.

Table de 8 : 8 ; 16 ; 24 est aussi un multiple de 12

Ou Table de 12 : 12 ; 24 est aussi un multiple de 8

$\frac{-5}{8} = \frac{-5\times 3}{8\times 3} = \frac{-15}{24}$ et $\frac{-7}{12} = \frac{-7\times 2}{12\times 2} = \frac{-14}{24}$. Comme –15 < –14, on a : $\frac{-5}{8} < \frac{-7}{12}$.

4. Addition et soustraction

Règle 4. 1er cas : Pour additionner (ou soustraire) deux fractions de même dénominateur, il faut additionner (ou soustraire) les numérateurs et conserver le dénominateur commun.

$$\boxed{\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{a}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{d}}$$

2ème cas : Pour additionner (ou soustraire) deux fractions de dénominateurs différents, il faut chercher d'abord un dénominateur commun, puis appliquer le 1er cas.

Exemple : Calculer A = $\frac{-5}{8} - \frac{7}{12}$.

On est dans le 2ème cas. Le dénominateur commun est 24 (voir ci-dessus). On a alors :

A = $\frac{-5}{8} - \frac{7}{12} = \frac{-5\times 3}{8\times 3} - \frac{7\times 2}{12\times 2} = \frac{-15}{24} - \frac{7}{24} = \frac{-15-7}{24} = \frac{-22}{24}$

Puis, il faut simplifier A = $\frac{-22\div 2}{24\div 2} = \boxed{\frac{-11}{12}}$

5. Multiplication des fractions

Règle 5 : Pour multiplier deux nombres relatifs en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, en respectant la règle des signes.

$$\boxed{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}}$$

Remarque : Attention ! Il est vivement conseillé de décomposer le numérateur et le dénominateur pour simplifier AVANT d'effectuer les calculs.

Exemple : Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction simple : A = $\frac{-9}{35}\times\frac{-14}{-27}$

D'abord, il y a trois signes moins, donc A est négatif. Puis, on a :

A = $\frac{-9}{35}\times\frac{-14}{-27}=-\frac{9\times14}{35\times27}=-\frac{\cancel{9}\times\cancel{7}\times2}{\cancel{7}\times5\times\cancel{9}\times3}=-\frac{2}{15}$ Donc : $\boxed{A = -\frac{2}{15}}$

6. Inverse d'un nombre relatif

Définition : *Deux nombres relatifs sont dits inverses si leur produit est égal à 1.*

Si x et x' sont des nombres relatifs non nuls, alors x' est l'inverse de x si et seulement si $\boxed{x\times x'=1}$. *L'inverse d'un nombre relatif non nul x est le nombre $\frac{1}{x}$ noté aussi x^{-1}.*

Remarques : – 0 n'a pas d'inverse ! car 0 multiplié par n'importe quel nombre est égal à 0.

– *Un nombre relatif et son inverse sont obligatoirement de même signe.*

– *Si x est un nombre relatif non nul, alors l'inverse de son inverse est égal à lui-même.*

– *Si a et b sont deux nombres non nuls, l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.*

On a alors les propriétés suivantes, pour tous les nombres relatifs a, b et x non nuls :

$$\boxed{x\times\frac{1}{x}=1}\ \boxed{\frac{1}{x}\times x=1}\ ,\ \boxed{\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}=x}\quad et\quad \boxed{\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)}=\frac{b}{a}}$$

7. Division des fractions

Règle 6 : Pour diviser par un nombre relatif (non nul), on multiplie par son inverse.

Donc, pour tous nombres relatifs a et b non nuls, on a

$$\boxed{a\div b=\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}}$$

En particulier, si a, b, c et d sont quatre nombres relatifs non nuls, comme l'inverse de $\frac{c}{d}$ s'écrit $\frac{1}{\frac{c}{d}}$ et est égal à $\frac{d}{c}$, on a les égalités suivantes :

$$\boxed{\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}$$

Attention à la position du « trait centrale de fraction » et à la place du signe égal.

Exemple : Calculer A = $\frac{\frac{3}{8} - \frac{7}{12}}{\frac{10}{16}}$. On calcule d'abord le numérateur.

A = $\frac{\frac{3\times3}{8\times3} - \frac{7\times2}{12\times2}}{\frac{10}{16}}$

A = $\frac{\frac{9}{24} - \frac{14}{24}}{\frac{10}{16}}$

A = $\frac{-\frac{5}{24}}{\frac{10}{16}}$

A = $\frac{-5}{24} \div \frac{10}{16}$

A = $\frac{-5}{24} \times \frac{16}{10}$

A = $\frac{-5\times16}{24\times10}$

A = $\frac{-\cancel{5}\times\cancel{8}\times\cancel{2}}{\cancel{8}\times3\times\cancel{5}\times\cancel{2}}$

$\boxed{\text{A} = \frac{-1}{3}}$