Chapitre 4

Racines carrées

I. Activité n°1.

ABCD est un carré de coté c et d'aire a. (1°) Choisir des valeurs de c puis calculer a.

(2°) Choisir des valeurs de a puis calculer c.

c = 3 cm ⟶	a = 9 cm²,	c = 6 cm ⟵	a = 36 cm²
c = 4 cm ⟶	a = 16 cm²	c = 7 cm ⟵	a = 49 cm²
c = 5 cm ⟶	a = 25 cm²	c = ? ⟵	a = 20 cm²

Si a = 20 cm², on cherche le nombre positif c dont le carré est égal à 20.

20 est compris entre 16 et 25, donc c est compris entre 4 et 5.

Faites plusieurs essais. Par exemple : pour c = 4,5, on calcule c² = 20,25, trop grand.

Recommencez avec d'autres nombres.

On peut aussi utiliser la touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice (limitée à 10 chiffres). On obtient :

$$\sqrt{20} = 4,472135955$$

Mais attention ! A-t-on $4,472135955^2 = 20$? C'est faux, puisque $4,472135955^2$ est un nombre qui a 18 décimales et doit se terminer par un 5.

En fait $4,472135955$ n'est qu'une valeur approchée de $\sqrt{20}$ arrondie à la 9ème décimale.

Avec un logiciel (MAPLE), on a cherché une valeur approchée avec 100 décimales :

4.472135954999579392818347337462552470881236719223051448541794490821041851 2756097988288288167575645500… etc

II. Racine carrée d'un nombre positif

1°) Définition

Soit a un nombre positif. Il existe un (seul) nombre positif dont le carré est égal à a.

Ce nombre est appelé « ***racine carrée de*** a » et se note $\sqrt{a}$. Le symbole $\sqrt{\ }$ s'appelle un « ***radical*** ».

Exemples

- $\sqrt{-2}$ n'existe pas car il n'existe aucun nombre dont le carré est égal à – 2.
- $\sqrt{25} = 5$ car $5^2 = 25$ et $5 > 0$. Ce qui n'est pas le cas pour (– 5).

2°) Premières propriétés

Quels que soient les nombres a et b positifs, on a les propriétés suivantes :

(P_1) : $\sqrt{a} \geq 0$ (P_2) : $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ (P_{2bis}) : $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ (P_3) : $\sqrt{a^2} = a$

Exemples : $(\sqrt{8})^2 = \sqrt{8} \times \sqrt{8} = 8$ et $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$.

3°) Définition

Si a est un nombre positif, alors $\sqrt{a}$ n'est pas toujours un nombre entier ou décimal ou rationnel. Dans ce cas, on dit que $\sqrt{a}$ **est un nombre irrationnel** (comme π).

Exemples :

- $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont des nombres irrationnels.
- $\sqrt{25} = 5$ est un nombre entier.
- $\sqrt{2,25} = 1,5$ est un nombre décimal.

Pour obtenir un nombre entier, il faut choisir un nombre dans la liste des nombres entiers **carrés parfaits** : 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100 ; 121 ; 144 ; 169 ; 196 ; 225 ;…

III. Opérations sur les racines carrées

1°) Racine carrée et multiplication

Soient a et b deux nombres positifs. Alors, le produit de deux racines carrées est égal à la racine carrée du produit :

(P_4) : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

Exemple : $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$

2°) Racine carrée et quotient

Soient a et b deux nombres positifs, $b \neq 0$. Alors, le quotient de deux racines carrées est égal à la racine carrée du quotient :

$$(P_5) : \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Exemple : $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}} = \sqrt{\frac{27}{48}} = \sqrt{\frac{9 \times 3}{16 \times 3}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

3°) Racine carrée et addition

Soient a et b deux nombres positifs non nuls. Alors, la somme de deux racines carrées n'est pas égale à la racine carrée de la somme :

$$(P_6) : \sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$$

Exemple : $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ et $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$. Donc, on a bien : $\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16 + 9}$.

4°) Racine carrée et soustraction

Soient a et b deux nombres positifs non nuls, $a > b$. Alors, la différence de deux racines carrées n'est pas égale à la racine carrée de la différence :

$$(P_7) : \sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a - b}$$

Exemple : $\sqrt{16} - \sqrt{9} = 4 - 3 = 1$ et $\sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$. Donc, on a bien : $\sqrt{16} - \sqrt{9} \neq \sqrt{16 - 9}$.

5°) Simplification des racines carrées

Simplifier une racine carrée $\sqrt{8}$ revient à l'écrire avec un nombre le plus petit possible sous le radical ! Pour cela on utilise les nombres entiers carrés parfaits et les propriétés :

Exemples :

$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. On a décomposé 8 à l'aide d'un carré parfait 8 = **4x**2.

$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$. On a décomposé 48 à l'aide d'un carré parfait 48 = **16x**3.

$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$. On a décomposé 75 à l'aide d'un carré parfait 75 = **25x**3.

IV. Règles de calculs

Les règles de calculs sur les racines carrées sont les mêmes que les règles appliquées aux nombres décimaux, aux fractions et au calcul littéral.

Exemples :

$A = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

$A = (5+3)\sqrt{2}$

$A = 8\sqrt{2}$.

On met $\sqrt{2}$ en facteur

$B = 5\sqrt{2} \times 3\sqrt{3}$

$B = 5 \times 3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}$

$B = 15 \times \sqrt{2 \times 3}$

$B = 15\sqrt{6}$

On multiplie les nombres entre eux et les racines entre elles.

$C = (3\sqrt{2} - 4)(5\sqrt{2} + 3)$

$C = 3\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \times 3 - 4 \times 5\sqrt{2} - 4 \times 3$

$C = 3 \times 5 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} + 3 \times 3\sqrt{2} - 4 \times 5\sqrt{2} - 4 \times 3$

$C = 15 \times 2 + 9\sqrt{2} - 20\sqrt{2} - 12$

$C = 30 - 12 + (9 - 20)\sqrt{2}$

$C = 18 - 11\sqrt{2}$

- On développe naturellement en respectant les propriétés.
- On calcule $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ (d'après P_{2bis})
- On utilise la distributivité
- On regroupe les entiers entre eux et les racines entre elles.

Réduire une somme avec des racines carrées (Brevet) :

$D = 5\sqrt{32} + 2\sqrt{18} - \sqrt{50}$

$D = 5\sqrt{16 \times 2} + 2\sqrt{9 \times 2} - \sqrt{25 \times 2}$

$D = 5 \times \sqrt{16} \times \sqrt{2} + 2\sqrt{9} \times \sqrt{2} - \sqrt{25} \times \sqrt{2}$

$D = 5 \times 4 \times \sqrt{2} + 2 \times 3 \times \sqrt{2} - 5 \times \sqrt{2}$

$D = 20\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

$D = (20 + 6 - 5)\sqrt{2}$

$D = 21\sqrt{2}$

On décompose les nombres sous le radical à l'aide de carrés entiers et faire apparaître un facteur commun $\sqrt{2}$

On met $\sqrt{2}$ en facteur

V. Résolution des équations « $x^2 = a$ »

1°) Trois cas possibles

Soit a un nombre positif donné. Alors

- Si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ n'admet aucune solution.
- Si $a = 0$, alors l'équation $x^2 = 0$ admet une seule solution : le nombre 0.
- Si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : l'une positive : $\sqrt{a}$, et l'autre négative : $-\sqrt{a}$.

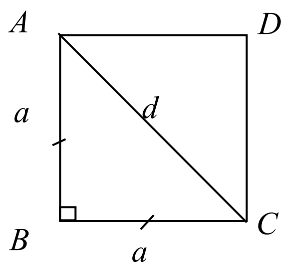
Exemples : Résoudre les équations suivantes : (1) $x^2 - 7 = 0$; (2) $x^2 + 5 = 0$ et (3) $x^2 = 0$.

(1) l'équation $x^2 - 7 = 0$ est équivalente à $x^2 = 7$. Or 7 > 0. Donc l'équation (1) admet deux solutions $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$.

(2) l'équation $x^2 + 5 = 0$ est équivalente à $x^2 = -5$. Or $-5 < 0$.
Donc l'équation (2) n'admet aucune solution puisqu'un carré n'est jamais négatif.

(3) l'équation $x^2 = 0$ admet une seule solution : le nombre 0.

VI. Applications



Exemple 1. Calcul de la diagonale d'un carré

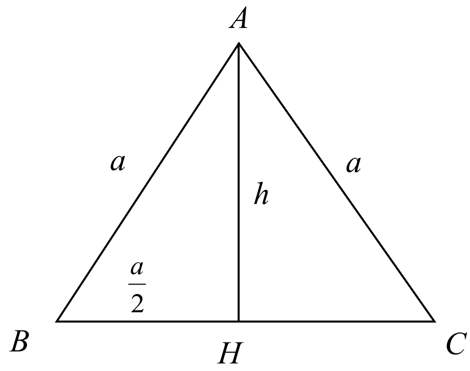
ABCD est un carré de côté a et de diagonale d.

Exprimer la diagonale d en fonction de a.

ABC est un triangle rectangle en B. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$d^2 = a^2 + a^2$$
$$d^2 = 2a^2$$

Donc
$$d = \sqrt{2a^2}$$
$$d = \sqrt{2} \times \sqrt{a^2}$$
$$d = a\sqrt{2}$$



Exemple 2. Calcul de la hauteur d'un triangle équilatéral.

ABC est un triangle équilatéral de côté a et de hauteur h.

Exprimer la hauteur h en fonction de a.

ABH est un triangle rectangle en H. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$
$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$
$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

Donc
$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$
$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$
$$\boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$