Géométrie dans l'espace

Exercice 1.

1°) Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les deux points $A(4;2;-1)$ et $B(2;3;-1)$ et les trois vecteurs :

$$\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \;;\; \vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\\6\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}.$$

Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plans suivants.

a) P_1 est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n_1}$.

b) P_2 est le plan passant par B et ayant pour vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2° a) Montrer que les deux plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite d.

b) Déterminer une représentation paramétrique de d et en déduire un vecteur directeur $\vec{w}$ de d.

Exercice 1. (Exercice n°3, partie B, Liban 2019)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point $A(3 ; 1 ;-5)$ et la droite d de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-2t+9 \\ z=t-3 \end{cases} \quad t\in \mathbb{R}$$

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P orthogonal à la droite d et passant par lepoint A.
2. Montrer que le point d'intersection du plan P et de la droite d est le point $B(5 ; 5 ;-1)$,
3. a) Justifier que le point $C(7 ; 3 ;-9)$ appartient au plan P.

   b) Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.
4. Soit t un nombre réel différent de 2 et M le point de paramètre t appartenant à la droite d.

   a) Justifier que le triangle ABM est rectangle.

   b) Montrer que le triangle ABM est isocèle en B si et seulement si le nombre réel t vérifie l'équation $t^2-4t=0$.

   c) En déduire les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

Corrigé

Exercice 1 corrigé.

1° a) Cherchons une équation cartésienne du plan P_1.

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point quelconque de l'espace. On a les équivalences suivantes.

$M \in P_1$ (ssi) $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n_1}$

(ssi) $\overrightarrow{AM}.\vec{n_1}=0$

(ssi) $1(x-4)-2(y-2)+2(z+1)=0$

(ssi) $x-2y+2z-4+4+2=0$

(ssi) $x-2y+2z+2=0$

Conclusion. une équation cartésienne du plan P est : $x-2y+2z+2=0$.

1° a) Cherchons une équation cartésienne du plan P_2.

1ère étape : Montrons d'abord que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, donc définissent bien un plan.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étaient colinéaires, alors il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.
Mais alors, en passant aux coordonnées, on obtient :

$\begin{cases} 5=k\times 0 \\ -2=k\times 1 \\ 6=k\times(-3) \end{cases}$ Ce qui donne : $\begin{cases} 5=0 \\ k=-2 \\ k=2 \end{cases}$. Ce qui est impossible.

Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires,donc ils définissent bien un plan.

2ème étape : On cherche un vecteur normal au plan P_2.

Soit $\vec{n_2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace. On sait que $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs de base de P_2. Alors, on a les équivalences suivantes :

$\vec{n_2}$ est un vecteur normal au plan P_2

(ssi) $\vec{n_2}$ est orthogonal aux deux vecteurs de base

(ssi) $\vec{n_2}\perp\vec{u}$ et $\vec{n_2}\perp\vec{v}$

(ssi) $\vec{n_2}.\vec{u}=0$ et $\vec{n_2}.\vec{v}=0$

(ssi) $\begin{cases} 5a-2b+6c=0 \\ b-3c=0 \end{cases}$

(ssi) $\begin{cases} 5a-2(3c)+6c=0 \\ b=3c \end{cases}$

(ssi) $\begin{cases} 5a=0 \\ b=3c \\ c\in\mathbb{R} \end{cases}$

Ce qui donne : $\vec{n_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 3c \\ c \end{pmatrix}$ $\quad c\in\mathbb{R}$

Nous savons qu'il existe une infinité de vecteurs normaux à un plan. Donc, il suffit de choisir $c\in\mathbb{R}$ de telle manière que $\vec{n_2}\neq\vec{0}$, donc $c\neq 0$.

Pour $c=1$, on obtient : $\vec{n_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est donc un vecteur normal au plan P_2.

<u>3ème étape</u> : On détermine une équation cartésienne du plan P_2 qui passe par le point $B(2;3;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n_2}$.

Soit $M(x;y;z)$ un point quelconque de l'espace. Alors :

$M\in P_2$ (ssi) $\overrightarrow{BM}$ est orthogonal à $\vec{n_2}$

(ssi) $\overrightarrow{BM}.\vec{n_2}=0$

(ssi) $0\times(x-2)+3\times(y-3)+1\times(z+1)=0$

(ssi) $3y+z-9+1=0$

(ssi) $3y+z-8=0$

<u>Conclusion</u> : Une équation cartésienne du plan P_2 est : $3y+z-8=0$. CQFD

2° a) Montrons que les deux plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite d.

$\vec{n_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs normaux aux plan P_1 et P_2 respctivement.

On sait que « deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires ». Vérifions si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont ou non colinéaires.

Si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ étaient colinéaires, alors il existe un réel k tel que $\vec{n_1}=k\vec{n_2}$.

Mais alors, en passant aux coordonnées, on obtient : $\begin{cases} 1=k\times 0 \\ -2=k\times 3 \\ 2=k\times 1 \end{cases}$

Ce qui donne : $\begin{cases} 1=0 \\ k=\dfrac{-2}{3} \\ k=2 \end{cases}$. Ce qui est impossible.

Les deux vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires. Ce qui montre que les deux plans P_1 et P_2 ne sont pas parallèles. Par conséquent, les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite d.

2° b) Déterminer une représentation paramétrique de d et en déduire un vecteur directeur $\vec{w}$ de d.

a) Représentation paramétrique de d

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point quelconque de l'espace.

Nous obtenons un système de deux équations à trois inconnues. Nous allons essayer d'exprimer deux inconnues (*indépendantes*) en fonction de la troisième inconnue (*dépendante* des deux autres). On a les équivalences suivantes :

$M \in P_1 \cap P_2$ (ssi) $M \in P_1$ et $M \in P_2$.

(ssi) $\begin{cases} x-2y+2z+2=0 \\ 3y+z-8=0 \end{cases}$

(ssi) $\begin{cases} x-2y+2z+2=0 & \textit{garder cette ligne ;} \\ z=-3y+8 & \textit{z en fonction de y} \end{cases}$

(ssi) $\begin{cases} x-2y+2(-3y+8)+2=0 & \textit{substituer} \\ z=-3y+8 & \textit{équation de substitution} \end{cases}$

(ssi) $\begin{cases} x=8y-18 & \textit{poser } y=t \\ y\in\mathbb{R} & \textit{comme paramètre} \\ z=-3y+8 & t\in\mathbb{R} \end{cases}$

(ssi) $\boxed{\begin{cases} x=8t-18 \\ y=t \\ z=-3t+8 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.}$ *remplacer* $y = t$.

Conclusion. On obtient ainsi une une représentation paramétrique de d .

b) En déduire un vecteur directeur $\vec{w}$ de d.

D'après la représentation paramétrique de d, les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite d sont les coefficients de t. Donc $\vec{w}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d.

De plus la droite d passe par le point $C(-18\,;0\,;8)$ dont les coordonnées sont les constantes correspondant à $t=0$.

Exercice 2 corrigé.

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère le point $A(3\ ;1\ ;-5)$ et la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-2t+9 \\ z=t-3 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

1°) Cherchons une équation cartésienne du plan P orthogonal à la droite d et passant par lepoint A.

Tout d'abord, nous devons déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d.

Or, d'après la représentation paramétrique de d, les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite d sont les coefficients de t. Donc $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d.

d est orthogonale au plan P équivaut à dire que $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan P.

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point quelconque de l'espace. Alors :

$$\begin{aligned} M\in P &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\vec{u} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u}=0 \\ &\Leftrightarrow 2(x-3)-2(y-1)+1(z+5)=0 \\ &\Leftrightarrow 2x-2y+z-6+2+5=0 \\ &\Leftrightarrow 2x-2y+z+1=0 \end{aligned}$$

<u>Conclusion</u>. une équation cartésienne du plan P est : $2x-2y+z+1=0$.

2°) Montrer que le point d'intersection du plan P et de la droite d est le point B de coordonnées $B\,(5\ ;5\ ;-1)$.

Soit $B(x\,;y\,;z)$ le point d'intersection du plan P et de la droite d. Alors :

$B\in P\cap d$ (ssi) $B\in P \text{ et } B\in d$

(ssi) $2x-2y+z+1=0$ et il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-2t+9 \\ z=t-3 \end{cases}$

(ssi) Il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $2(2t+1)-2(-2t+9)+(t-3)+1=0$

et $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-2t+9 \\ z=t-3 \end{cases}$

La résolution de l'équation en t donne :

$$2(2t+1)-2(-2t+9)+(t-3)+1=0 \text{ (ssi) } 9t-18=0 \text{ (ssi) } t=2.$$

Il suffit de remplacer t par 2 dans les trois équations pour trouver les coordonnées de B. En effet :

$$\begin{cases} x=2t+1=2\times 2+1=5 \\ y=-2t+9=-2\times 2+9=5 \\ z=t-3=2-3=-1 \end{cases} \text{ donc } B(5;5;-1)$$

3° a) Montrons que le point $C(7 ; 3 ;-9)$ appartient au plan P.

L'équation du plan P est $2x-2y+z+1=0$. On a alors :

$2\times 7-2\times 3+(-9)+1=14-6-9+1=0$. Ce qui montre que $C(7;3;-9)\in P$.

3° b) Montrons que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

— Montrons que ABC est rectangle en A.

<u>1ère méthode</u>. On calcule les longueur AB, AC et BC et on utilise la réciproque du théorème de Pythagore. (classe de 4ème).

<u>2ème méthode</u>. On calcule les coordonnées des deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ et on montre que le produit scalaire est nul.

On a : $\vec{AB}\begin{cases} x_B-x_A=5-3=2 \\ y_B-y_A=5-1=4 \\ z_B-z_A=-1-(-5)=4 \end{cases}$ donc $\vec{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

De même : $\vec{AC}\begin{cases} x_C-x_A=7-3=4 \\ y_C-y_A=3-1=2 \\ z_C-z_A=-9-(-5)=-4 \end{cases}$ donc $\vec{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Mais alors : $\vec{AB}.\vec{AC}=2\times 4+4\times 2+4\times(-4)=8+8-16=0$. Donc $\vec{AB}\perp\vec{AC}$.

Comme $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux, le triangle ABC est rectangle en A.

— Montrons que ABC est isocèle en A.

On calcule les longueurs AB et AC :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{2^2+4^2+4^2}=\sqrt{36}=6.$$

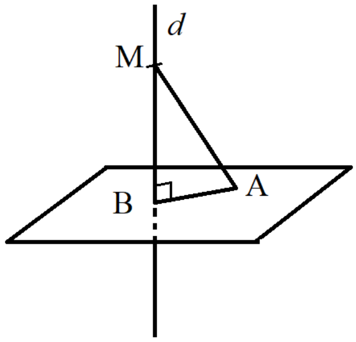
De même : $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2}=\sqrt{4^2+2^2+(-4)^2}=\sqrt{36}=6$.

Donc : $AB = AC$. Ce qui montre que ABC est isocèle en A.

Conclusion. Le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

4°) Soit t un réel différent de 2 et M le point de paramètre t appartenant à la droite d.

a) Montrons que le triangle ABM est rectangle en B.



Comme le montre la figure ci-contre, $A\in P$ et $B\in P$ et $A\neq B$ et $d\perp P$, la droite (AB) est orthogonale à d.

Donc pour tout point $M\in d$, ABM est rectangle en B si et seulement si $M\neq B$.

Or $M=B$ si et seulement si, il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases}2t+1=5\\-2t+9=5\\t-3=-1\end{cases}$

Ces trois équations sont équivalentes à $t=2$.

Conclusion. ABM est rectangle en B si et seulement si $M\neq B$ si et seulement si $t\neq 2$. D'où le résultat.

4° b) Montrons que le triangle ABM est isocèle en B si et seulement si le nombre réel t vérifie l'équation $t^2-4t=0$

Soit $M(x\,;y\,;z)\in d$, donc il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases}x=2t+1\\y=-2t+9\\z=t-3\end{cases}$

Mais alors : ABM est isocèle en B si et seulement si $BM = BA$. On a alors :

$$\begin{aligned}BM=BA &\Leftrightarrow BM^2=AB^2\\&\Leftrightarrow (x_M-x_B)^2+(y_M-y_B)^2+(z_M-z_B)^2=36\\&\Leftrightarrow (x-5)^2+(y-5)^2+(z+1)^2=36\\&\Leftrightarrow (2t+1-5)^2+(-2t+9-5)^2+(t-3+1)^2=36\\&\Leftrightarrow (2t-4)^2+(-2t+4)^2+(t-2)^2=36\\&\Leftrightarrow 4t^2-16t+16+4t^2-16t+16+t^2-4t+4=36\\&\Leftrightarrow 9t^2-36t=0\\&\Leftrightarrow t^2-4t=0\end{aligned}$$

D'où le résultat.

4° c) Cherchons les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

D'après la question précédente, ABM est isocèle en B si et seulement si $t^2-4t=0$.

Or : $t^2-4t=0$ (ssi) $t(t-4)=0$

(ssi) $t=0$ ou $t=4$.

Pour ces deux valeurs de t, on calcule les coordonnées des deux points M_1 et M_2 :

Pour $t=0$: $\begin{cases} x=2\times 0+1 \\ y=-2\times 0+9 \\ z=0-3 \end{cases}$ donc $M_1(1\,;9\,;-3)$.

Pour $t=4$: $\begin{cases} x=2\times 4+1 \\ y=-2\times 4+9 \\ z=4-3 \end{cases}$ donc $M_2(9\,;1\,;1)$.

Conclusion. Les deux points M_1 et M_2 de la droite d pour lesquels les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 sont isocèles en B sont :

$$M_1(1\,;9\,;-3) \quad \text{et} \quad M_2(9\,;1\,;1).$$