Fiche Bac S 108 — *Terminale S*

Fonction Logarithme népérien

Exercice 1. *Calcul de limites*

Déterminer le domaine de définition de la fonction f suivante ; calculer ses limites aux bornes de son domaine de définition et interpréter graphiquement le résultat.

$$f : x \to f(x) = \frac{x \ln x}{x-1}$$

Exercice 2. *Calcul de limites*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-3,+\infty[$ par : $f(x) = 5\ln(x+3) - x$

1°) Montrer que pour tout $x \in]-3,+\infty[$: $f(x) = x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$.

2°) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice n°3. (*Extrait BAC Asie 2011*)

Étude de fonctions ; Calcul de limites ; Position relative de deux courbes ; Calcul d'aires entre deux courbes.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°. *Étude d'une fonction f.*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère.
La courbe de la fonction f est représentée en annexe.

1.*a*) Déterminer les limites de f en 0, puis en $+\infty$.
Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
1.*b*) Calculerla dérivée f' de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
1.*c*) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2°. *Étude d'une fonction g.*

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$

On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans le repère.

2.a) Justifier l'égalité suivante : pour tout $x \in]0,+\infty[$: $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4\frac{(\ln\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2}$

2.b) Déterminer les limites de g en 0, puis en $+\infty$.
Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2.c) Calculerla dérivée g' de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
2.d) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

3°) *Étude de la position relative des deux courbes*

3.a) Démontrer que les courbes C_f et C_g possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.

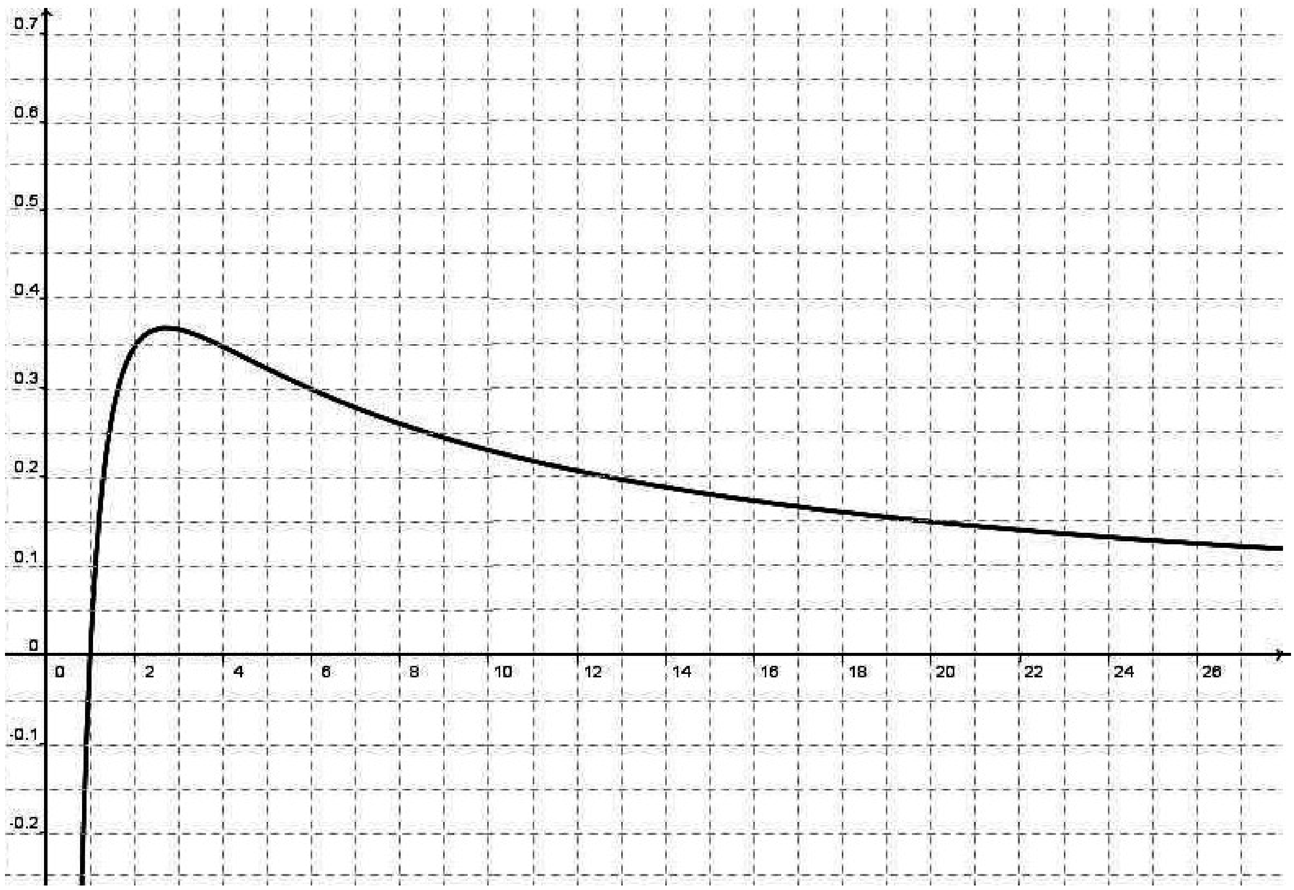
3.b) Étudier la position relative des courbes C_f et C_g.

3.c) Construire la courbe de la fonction g dans le même repère en annexe.

4°) *Calcul de l'aire entre les deux courbes*

On désigne par ***A*** l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée, d'une part par les courbes C_f et C_g, et d'autre part par les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$. En exprimant l'aire ***A*** comme différence de deux aires que l'on précisera, calculer l'aire ***A***.

ANNEXE



Corrigé

Exercice 1. *Calcul de limites*

1°) Déterminer le domaine de définition de la fonction f suivante :

$$f : x \rightarrow f(x) = \frac{x \ln x}{x-1}$$

2°) Calculer ses limites aux bornes de son domaine de définition et interpréter graphiquement le résultat.

1°) Domaine de définition de la fonction f

$x \in D_f$ (ssi) *i*) $\ln x$ existe et *ii*) Le dénominateur est non nul.
(ssi) *i*) $x > 0$ et *ii*) $x-1 \neq 0$
(ssi) *i*) $x > 0$ et *ii*) $x \neq 1$

Par conséquent : $\boxed{D_f =]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[}$

2°) Calcul des limites aux bornes du domaine de définition et interprétation graphiquement des résultats.

Nous devons donc calculer 4 limites : en 0 à droite, en 1 à gauche et à droite et en $+\infty$.

En fait $f(x)$ est de la forme : $\frac{ab}{c}$. Pour calculer ces limites, nous allons écrire cette expression de différentes manières et choisir la manière la plus adaptée à chacun des cas.

$$\frac{ab}{c} = a \times \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \times b, \quad \text{donc : } f(x) = \frac{x \ln x}{x-1} = \frac{x \times \ln x}{x-1} = \frac{x}{x-1} \times \ln x.$$

a) ***Calcum de la limite à droite en 0***

On utilise l'expression donnée de $f(x)$. Un calcul direct montre que la limite au numérateur est une forme indéterminée $0 \times \infty$. Nous devons lever l'indétermination.

D'après le cours, on sait que $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} x-1 = -1 \end{cases}$

Donc, par quotient des limites, on a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x \ln x}{x-1} = 0.$

Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0}$$

Interprétation graphique

Comme nous avons une limite finie, la courbe C_f n'admet pas d'asymptote en 0.

b) ***Calcum de la limite en 1***

Un calcul direct montre que cette limite est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Nous devons lever l'indétermination. Nous allons utiliser la deuxième expression de *f* (*x*). Pour tout $x \in D_f : f(x) = x \times \frac{\ln x}{x-1}$.

D'après le cours, on sait que $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 & \textit{taux d'accroissement} \\ et \ \lim\limits_{x \to 1} x = 1 \end{cases}$

Donc, par produit des limites, on a bien : $\lim\limits_{x \to 1} x \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{x \to 1} f(x) = 1}$$

Interprétation graphique

Comme nous avons une limite finie, la courbe C_f n'admet pas d'asymptote en 1.

c) ***Calcum de la limite en +∞***

On utilise la troisième expression de *f* (*x*). Pour tout $x \in D_f : f(x) = \frac{x}{x-1} \times \ln x$.

Or pour tout $x > 0$ et $x \neq 1$, on a : $\frac{x}{x-1} = \frac{x \times 1}{x \times \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$.

Et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$

On peut donc écrire : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \\ et \ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

Donc, par produit des limites, on a bien : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} \times \ln x = 1$.

Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

Interprétation graphique

Comme nous avons une limite infinie en +∞, la courbe C_f n'admet pas asymptote horizontale vers +∞.

Exercice 2 corrigé. *Calcul de limites*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle] –3 ;+∞ [par :
$f(x)=5\ln(x+3)-x$

1°) Montrons que pour tout $x \in]-3 ;+\infty[$: $f(x)=x\left(5\frac{\ln x}{x}-1\right)+5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$.

Pour tout $x \in]-3,+\infty[$:

$$f(x)=5\ln(x+3)-x$$

$$f(x)=5\ln\left(x\times\frac{x+3}{x}\right)-x \qquad \text{car} \quad x+3=x\times\frac{x+3}{x}$$

$$f(x)=5\left[\ln x+\ln\left(\frac{x+3}{x}\right)\right]-x \qquad \text{car} \quad \ln(ab)=\ln a+\ln b$$

$$f(x)=5\ln x+5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-x \qquad \text{car} \quad \frac{x+3}{x}=1+\frac{3}{x}$$

$$f(x)=5x\frac{\ln x}{x}-x+5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) \qquad \text{On met } -x \text{ en 2ème position.}$$

$$f(x)=x\left(5\frac{\ln x}{x}-1\right)+5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right). \qquad \text{On factorise par } x.$$

D'où le résultat.

2°) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers +∞.

Un calcul direct montre que cette limite conduit à une forme indéterminée $\infty-\infty$. Nous devons lever l'indétermination. Pour cela, nous allons utiliser la deuxième expression de $f(x)$.

D'après le cours, on sait que $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \\ et \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \end{cases}$

Donc, par composition des limites, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5\frac{\ln x}{x}-1\right)=-1.$

Et par produit des limites, on obtient la limite du 1er terme :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\left(5\frac{\ln x}{x}-1\right)=-\infty} \quad (1)$$

Pour le 2ème terme, on effectue un changement de variable en posant : $X=1+\frac{3}{x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}=0$, on a : $\lim\limits_{x\to\infty} 1+\frac{3}{x}=1$. Donc $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} X=1 \\ et \ \lim\limits_{X\to 1} \ln X=0 \end{cases}$

Donc, par composition des limites, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)=0} \quad (2)$$

En additionnant les deux limites (1) et (2), on obtient la limite demandée.

Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$$

Exercice n°3 corrigé. (*Extrait BAC Asie 2011*)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°. *Étude d'une fonction f.*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère.
La courbe de la fonction f est représentée en annexe.

1°a) Déterminer les limites de f en 0, puis en $+\infty$

***Limite en* 0.** On décompose l'expression de $f(x)$ comme suit : $f(x)=\frac{1}{x}\times\ln x$.

Or, $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}=+\infty \\ et \ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty \end{cases}$

Donc, par produit des limites, on obtient :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty}$$

Par conséquent, la courbe C_f admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

***Limite en* $+\infty$.**

D'après le cours, on sait que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}=0$. Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=0}$$

Par conséquent, la courbe C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$.

1.*b*) Calculerla dérivée f' de la fonction f sur $]0,+\infty[$.

La fonction *f* est composée de fonctions définies et dérivables sur $]0,+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x>0$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}=\frac{u(x)}{v(x)}$, avec :

$$\begin{cases} u(x)=\ln x \quad donc \quad u'(x)=\frac{1}{x} \\ et \quad v(x)=x \quad donc \quad v'(x)=1 \end{cases}$$

Or $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Donc, pour tout $x>0$: $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times \ln x}{x^2}$

Par conséquent : $\boxed{f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}}$

1.*c*) Dresser le tableau de variations de la fonction *f*.

Le dénominateur de $f'(x)$ étant strictement positif, le signe de f' est le même que celui du numérateur $(1-\ln x)$. Or, pour tout $x>0$, on a :

$1-\ln x\geqslant 0$ (ssi) $1\geqslant \ln x$

(ssi) $\ln x\leqslant 1$

(ssi) $x\leqslant e$

et par conséquent :

$1-\ln x<0$ (ssi) $x>e$

On obtient alors le tableau de variations de *f* sur $]0,+\infty[$: avec $f(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	0	−	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2°) *Étude de la fonction g*.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $g(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$

On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans le repère.

2° a) Montrons que pour tout $x \in]0,+\infty[$: $\dfrac{(\ln x)^2}{x} = 4\dfrac{(\ln\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2}$

Il y a deux méthodes. On peut partir de gauche à droite ou bien de droite à gauche.

<u>1ère méthode</u> **:** de gauche à droite
Pour tout x > 0, on a :

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{\left[\ln(\sqrt{x})^2\right]^2}{(\sqrt{x})^2} \quad \text{car} \quad x=(\sqrt{x})^2.$$

$$= \frac{\left[2\ln\sqrt{x}\right]^2}{(\sqrt{x})^2} \quad \text{car} \quad \ln a^2 = 2\ln a.$$

$$= \frac{4(\ln\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2} \quad \text{car} \quad (ab)^2 = a^2b^2.$$

D'où le résultat.

<u>2ème méthode</u> **:** de gauche à droite
Pour tout x > 0, on a :

$$\frac{4(\ln\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\left[2\ln\sqrt{x}\right]^2}{(\sqrt{x})^2} \quad \text{car} \quad (ab)^2 = a^2b^2.$$

$$= \frac{\left[2\times\frac{1}{2}\ln x\right]^2}{x} \quad \text{car} \quad \ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a.$$

$$= \frac{(\ln x)^2}{x}$$

D'où le résultat.

2.b) <u>Déterminer les limites de g en 0, puis en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.</u>

<u>Limite en</u> **0.** On décompose l'expression de $g(x)$ comme suit : $f(x) = \dfrac{1}{x}\times(\ln x)^2$.

Or, $\begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \\ et \ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty \end{cases}$ donc : $\begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \\ et \ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln x)^2 = +\infty \end{cases}$

Donc, par produit des limites, on obtient :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = +\infty}$$

Par conséquent, la courbe C_g admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

***Limite en* +∞.**
Un calcul direct montre que cette limite est une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.
Nous devons lever l'indétermination. Nous allons utiliser l'expression de $g(x)$ trouvée dans la question précédente.

Pour tout $x \in D_g : g(x) = \frac{(\ln\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2}$. qu'on peut écrire : $g(x) = \left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

On effectue un changement de variable en posant : $X = \sqrt{x}$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, on a : $\lim\limits_{x \to \infty} X = +\infty$.

Or, d'après le cours, on sait que : $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$

La fonction carré est continue en 0 et on a : $\lim\limits_{X \to 0} X^2 = 0$

Donc, par composition des limites, on a : $\lim\limits_{X \to +\infty} \left(\frac{\ln X}{X}\right)^2 = 0$

Par conséquent, par composition des limites, on obtient :

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0}$$

Ce qui montre que :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0}$$

Par conséquent, la courbe C_g admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

2.*b*) Calculerla dérivée g' de la fonction g sur $]0, +\infty[$.
La fonction g est composée de fonctions définies et dérivables sur $]0, +\infty[$,
donc g est dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{u(x)}{v(x)}$,

avec : $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \quad donc \quad u'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \ln x = \frac{2}{x} \ln x \\ \quad et \quad v(x) = x \quad donc \quad v'(x) = 1 \end{cases}$

Or $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Donc, pour tout $x > 0$: $g'(x) = \frac{\left(2 \times \frac{1}{x} \ln x\right) \times x - 1 \times (\ln x)^2}{x^2}$

$$g'(x) = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$$

Par conséquent : $\boxed{g'(x)=\dfrac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}}$

1.*c*) Dresser le tableau de variations de la fonction *f*.

Le dénominateur de $g'(x)$ étant strictement positif, le signe de g' est le même que celui du numérateur $\ln x(2-\ln x)$. Or, pour tout $x > 0$, on a :

$\ln x \geqslant 0$ (ssi) $x \geqslant 1$

donc : $\ln x < 0$ (ssi) $0 < x < 1$

et : $1-\ln x \geqslant 0$ (ssi) $\ln x \leqslant 2$

(ssi) $0 < x \leqslant e^2$

donc : $1-\ln x < 0$ (ssi) $x > e^{2.}$

On obtient ainsi le tableau de signes de $g'(x)$ suivant

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	|	$+$	
$2-\ln x$	‖	$+$	|	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

On obtient alors le tableau de variations de g sur $]0,+\infty[$:

avec : $g(1)=0$ et $g(e)=\dfrac{(\ln e)^2}{e}=\dfrac{1}{e}$

x	0		1		e^2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	|	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0

3°. *Étude de la position relative des deux courbes*

3.a) Démontrer que les courbes C_f et C_g possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.

Les courbes C_f et C_g se coupent aux points dont les abscisses sont les solutions de l'équation : $f(x)=g(x)$. Or, pour tout x > 0, on a les équivalences :

$f(x)=g(x)$ (ssi) $\dfrac{(\ln x)}{x}=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$

$$
\begin{aligned}
f(x)=g(x) \quad &\text{(ssi)} \quad \ln x=(\ln x)^2\\
&\text{(ssi)} \quad (\ln x)^2-\ln x=0\\
&\text{(ssi)} \quad (\ln x)(\ln x-1)=0\\
&\text{(ssi)} \quad \ln x=0 \quad \text{ou} \quad \ln x-1=0\\
&\text{(ssi)} \quad x=1 \quad \text{ou} \quad x=e.
\end{aligned}
$$

Or, $f(1)=g(1)=0$ et $f(e)=g(e)=\dfrac{1}{e}$.

Par conséquent, les courbes C_f et C_g se coupent en deux points communs dont les coordonnées sont :

$$\boxed{A(1;0) \quad et \quad B\left(e;\tfrac{1}{e}\right)}$$

3.b) <u>Étudier la position relative des courbes C_f et C_g</u>.

Pour étudier la position relative des deux courbes C_f et C_g, il faut et il suffit de déterminer le signe de la différence $f(x)-g(x)$. Or

$$
\begin{aligned}
f(x)-g(x)&=\frac{(\ln x)}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}\\
&=\ln x-(\ln x)^2\\
&=\ln x(1-\ln x)
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi le tableau de signes de $f(x)-g(x)$ comme suit :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ce qui donne :

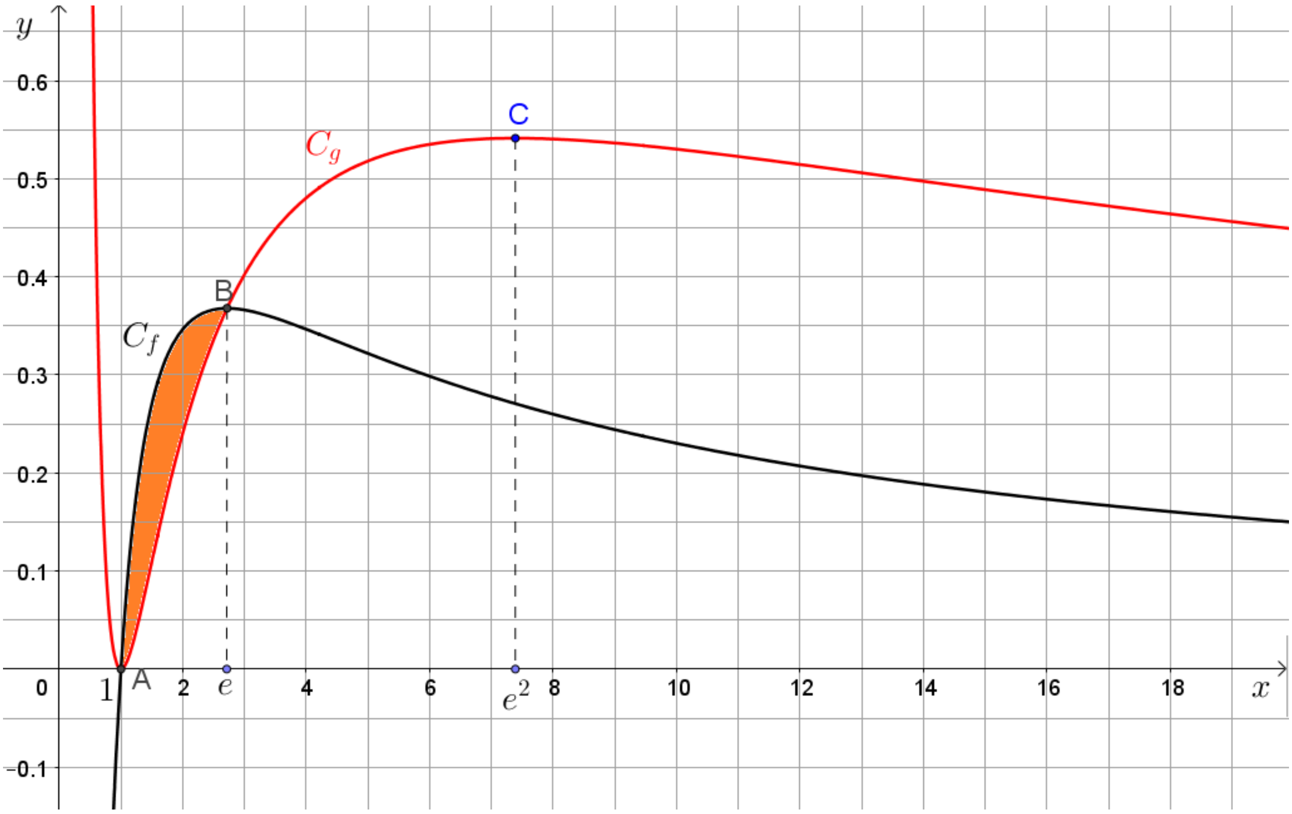
- $f(x)-g(x)>0$ (ssi) $1<x<e$

  Par conséquent : C_f est située au-dessus de Cg (ssi) $x\in]1;e[$.
- $f(x)-g(x)<0$ (ssi) $0<x<1$ ou $x>e$.

  Par conséquent : C_f est située en dessous de Cg (ssi) $x\in]0;1[\cup]0;+\infty[$.
- Les deux courbes se coupent en $x=1$ et $x=e$.

3.c) Construction de la courbe de la fonction g dans le même repère

(page suivante)



4°) *Calcul de l'aire entre les deux courbes*

On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée, d'une part par les courbes C_f et C_g, et d'autre part par les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$. En exprimant l'aire $\mathcal{A}$ comme différence de deux aires que l'on précisera, calculer l'aire $\mathcal{A}$.

Sur l'intervalle [1 ; e]; les deux fonctions f et g sont définies et continues et la courbe de f est située au-dessus de la courbe de g, donc $f-g$ est positive sur [1 ; e].
Donc :

$$A=\int_1^e (f(x)-g(x))\,dx$$

donc :

$$A=\int_1^e f(x)\,dx-\int_1^e g(x)\,dx$$

Pour tout $x>0$:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\times\ln x=u'\times u \quad \text{où} \quad u(x)=\ln x.$$

Or une primitive de $u'u$ est $\frac{1}{2}u^2+C$.

Donc une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$ est la fonction F définie par :

$$F(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C.$$

D'une manière analogue : Pour tout $x>0$:

$$g(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}=\frac{1}{x}\times(\ln x)^2=u'\times u^2 \quad \text{où} \quad u(x)=\ln x.$$

Or une primitive de $u'u^2$ est $\frac{1}{3}u^3+C$.

Donc une primitive de g sur $]0 ; +\infty[$ est la fonction G définie par :

$$G(x)=\frac{1}{3}(\ln x)^3+C.$$

Par conséquent,

$$A=\int_1^e f(x)dx-\int_1^e g(x)dx$$
$$A=\int_1^e f(x)dx-\int_1^e g(x)dx$$
$$A=F(e)-F(1)-[G(e)-G(1)]$$
$$A=\frac{1}{2}(\ln e-\ln 1)-[\frac{1}{3}(\ln e)^2-(\ln 1)^2]$$
$$A=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

Conclusion. L'aire ***A***, exprimée en unités d'aires, de la partie du plan délimitée par les courbes C_f et C_g et les deux droites d'équatuins $x=1$ et $x=e$ est :

$$\boxed{A=\frac{1}{6} \quad u.a.}$$

CQFD.