Fiche Bac S n°10 **Terminale S**

Intégration - Calcul des primitives

Exercice n°1

Déterminer des primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué :

a) $f(x)=\dfrac{5}{(2x+1)^3}$ sur $I=\left]\dfrac{-1}{2};+\infty\right[$ b) $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ sur $I=]0;+\infty[$

c) $h(x)=\sqrt{e^{-3x}}$ sur $\mathbb{R}$ d) $k(x)=6\sin(2x)\cos^3(2x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice n°2

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 2cm.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2-2x-1)e^{-x}$. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ où *a, b* et *c* sont des réels à déterminer.

1°) Calculer la dérivée de F en fonction de *a, b* et *c*.
2°) Déterminer *a, b* et *c* pour que F soit une primitive de la fonction f.
3°) Déterminer la primitive F_1 de la fonction f qui prend la valeur 5 en 0.
4°) Calculer l'aire du domaine du plan délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=0$ et $x=2$.
On donnera cette aire en u.a. puis en cm^2.

Exercice n°3

Soit n un entier naturel. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$

On pose, pour tout entier naturel n : $u_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1° a) Calculer u_1.
b) Montrer que $u_0+u_1=1$.
c) En déduire la valeur exacte de u_0.

2° a) Démontrer que pour tout $x>0$ et tout entier naturel n : $e^{-nx-x}\leqslant e^{-nx}$
b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3°) Démontrer que pour tout entier naturel n : $0\leqslant u_n\leqslant\int_0^1 e^{-nx}\,dx$

4° a) Calculer l'intégrale $I_n=\int_0^1 e^{-nx}\,dx$
b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Corrigé

Exercice n°1 *L'ART DE LA TRANSFORMATION !*

Déterminer des primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué :

a) Recherche d'une primitive de $f(x)=\dfrac{5}{(2x+1)^3}$ sur $I=\left]\dfrac{-1}{2};+\infty\right[$

On pose : $u(x)=2x+1$ donc : $u'(x)=2$.

Puis, On transforme $f(x)$ en fonction de u et de u'. Par suite :

$$f(x)=\frac{5}{u^3}=\frac{5}{2}\times\frac{2}{u^3}=\frac{5}{2}\times\frac{u'}{u^3}=\frac{5}{2}\times u'u^{-3}$$

Or, une primitive de $u'u^{-3}$ est : $\dfrac{u^{-3+1}}{-3+1}+C=\dfrac{u^{-2}}{-2}+C=\dfrac{-1}{2}\times\dfrac{1}{u^2}+C$

Donc une primitive de f est la fonction F définie par : $F(x)=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{-1}{2}\times\dfrac{1}{u^2}+C$

D'où : $\boxed{F(x)=\dfrac{-5}{4(2x+1)^2}+C}$

b) Recherche d'une primitive de $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ sur $I=]0;+\infty[$

On pose : $u(x)=\ln x$ donc : $u'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Puis, On transforme $g(x)$ en fonction de u et de u'. Par suite :

$$g(x)=\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\times\ln x=u'u=u'u^1 \ .$$

Or, une primitive de $u'u^1$ est : $\dfrac{u^2}{2}+C=\dfrac{1}{2}\times u^2+C$

Donc une primitive de g est la fonction G définie par : $\boxed{G(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+C}$

c) Recherche d'une primitive de $h(x)=\sqrt{e^{-3x}}$ sur $\mathbb{R}$

Cette fonction ne fait pas partie des fonctions de référence, ni des fonctions usuelles, ni des fonctions composées. Nous allons lui appliquer une transformation.
L'exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$ et toutes ses valeurs sont (strictement) positives, la fonction h est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$; donc elle admet des primitives.

D'autre part, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=\sqrt{e^{-3x}}=\left(e^{-3x}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{-\frac{3}{2}x}$

Et là, ça devient plus simple ! Nous reconnaissons une forme e^{ax}.

On pose : $u(x)=-\dfrac{3}{2}x$ donc : $u'(x)=-\dfrac{3}{2}$.

Puis, On transforme $h(x)$ en fonction de u et de u'. Par suite :

$$h(x)=-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)e^{-\frac{3}{2}x}=-\frac{2}{3}\times u'e^u \ .$$

Or, une primitive de la fonction composée $u'e^u$ est : e^u+C .

Donc, une primitive de h est la fonction H définie par : $\boxed{H(x)=-\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}x}+C}$

d) <u>Recherche d'une primitive de</u> $k(x)=6\sin(2x)\cos^3(2x)$ sur $\mathbb{R}$

On pose : $u(x)=\cos(2x)$ donc : $u'(x)=-2\sin(2x)$.

Puis, On transforme $k(x)$ en fonction de u et de u'. Par suite :

$$k(x)=-3\times(-2\sin(2x))\times(\cos(2x))^3=-3\times u'u^3 \ .$$

Or, une primitive de la fonction composée $u'u^3$ est : $\frac{1}{4}u^4+C$.

Donc, une primitive de k est la fonction K définie par : $\boxed{K(x)=-\frac{3}{4}\cos^4(2x)+C}$

Exercice n°2

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 2cm.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2-2x-1)e^{-x}$. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ où a, b et c sont des réels à déterminer.

<u>1°) Calculer la dérivée de F en fonction de a, b et c.</u>

La fonction F s'écrit sous la forme d'un produit $u.v$, avec

$u(x)=(ax^2+bx+c)$ donc : $u'(x)=2ax+b$

et $v(x)=e^{-x}$ donc : $v'(x)=-e^{-x}$

Comme $(u.v)'=u'.v+u.v'$, on a donc :

$$F'(x)=(2ax+b)e^{-x}+(ax^2+bx+c)(-e^{-x})$$

donc $F'(x)=(2ax+b)e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}$

On met e^{-x} en facteur et on réduit l'expression entre parenthèses pour obtenir :

$$F'(x)=\left(-ax^2+(2a-b)x+(b-c)\right)e^{-x}$$

<u>2°) Déterminer a, b et c pour que F soit une primitive de la fonction f.</u>

F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

pour tout $x\in\mathbb{R}$: $F'(x)=f(x)$. Par conséquent :

pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\left(-ax^2+(2a-b)x+(b-c)\right)e^{-x}=(x^2-2x-1)e^{-x}$.

Comme pour tout $x\in\mathbb{R}$: $e^{-x}\neq 0$ on a : $-ax^2+(2a-b)x+(b-c)=x^2-2x-1$

Et, par identification des coefficients des deux polynômes, on obtient :

$$\begin{cases}-a=1\\2a-b=-2\\b-c=-1\end{cases} \text{ donc } \begin{cases}a=-1\\-2-b=-2\\b-c=-1\end{cases} \text{ donc } \begin{cases}a=-1\\b=0\\c=1\end{cases} \text{ CQFD.}$$

Par conséquent :

$$F(x)=(-x^2+1)e^{-x} .$$

3°) Déterminer la primitive F_1 de la fonction f qui prend la valeur 5 en 0.

F_1 est une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$, donc il existe une constante C telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F_1(x) = F(x) + C.$

Mais alors, comme F_1 vérifie la « *condition initiale* » $F_1(0) = 5$, on alors les équivalences suivantes :

$F_1(0) = 5$ (ssi) $(-0^2+1)e^{-0} + C = 5$ (ssi) $1 + C = 5$ (ssi) $C = 4$.

Conclusion : La primitive F_1 de la fonction f qui prend la valeur 5 en 0 est la fonction définie par : $F_1(x) = (-x^2+1)e^{-x} + 4$.

4°) Calculer l'aire du domaine du plan délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=0$ et $x=2$. On donnera cette aire en u.a. puis en cm^2.

Rappel : pour calculer une aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses, sur $[a ; b]$; *il faut déterminer d'abord le signe de la fonction sur l'intervalle [a ; b]* puis,

- sur la partie de l'intervalle où *la fonction est positive, l'aire est égale à l'intégrale de f ;*
- sur la partie du domaine où *la fonction est négative, l'aire est égale à l'intégrale de – f .*

Dans notre cas, on étudie le signe de $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$ sur [0 ; 2].

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{-x} > 0$, on a : $f(x) > 0$ (ssi) $x^2 - 2x - 1 > 0$.

On calcule le discriminant pour trouver les racines du trinôme s'il en existe :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times1\times(-1) = 8$. Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times1} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2} \approx -0{,}4142\ldots < 0 \quad \text{et} \quad x_2 = 1+\sqrt{2} \approx 2{,}4142\ldots > 2$$

Le coefficient de x^2 étant positif, $f(x)$ est positive à l'extérieur des racines et négative entre les racines.

Donc pour tout $x \in [0 ; 2] : f(x) < 0$.

Par conséquent : l'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=0$ et $x=2$, est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 -f(x)\,dx = [-F(x)]_0^2 = -F(2) - (-F(0)) = F(0) - F(2)$$

$$\mathcal{A} = [(-0^2+1)e^{-0}] - [(-2^2+1)e^{-2}] = 3e^{-2} + 1$$

Conclusion : $\mathcal{A} = 3e^{-2}+1$ u.a. (en unités d'aires).

De plus comme OI = OJ = 2 cm, on a : 1 u.a. = 2×2 = 4 cm², on a :

$\mathcal{A} = 4(3e^{-2}+1)$ cm² (en centimètres carrés).

Je vérifie à la calculatrice Sur TI, je tape :

(-) 2nde CATALOG fnInt ou **fonctIntegr((X^2–2X–1) e^{-X},X,0,2)**

et j'obtiens 1,40600585...

Je calcule une valeur approchée de mon résultat et j'obtiens : $3e^{-2}+1 = 1,40600585...$
Mon résultat est correct !

Exercice n°3

Soit n un entier naturel. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$

On pose, pour tout entier naturel n : $u_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

1°.a) Calculer u_1.

$$u_1=\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$$

Même technique que l'exercice n°1. On cherche une primitive de la fonction f_1.
On pose : $u(x)=1+e^{-x}$ donc : $u'(x)=-e^{-x}$.

Puis, On transforme $f(x)$ en fonction de u et de u'. Par suite : $f_1(x)=\dfrac{-u'}{u}$.

On remarque, au passage, que pour tout sur $\mathbb{R}$: $u(x)>0$. Or, une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est : $\ln u+C$. Donc une primitive de f_1 est la fonction F_1 définie par :
$F(x)=-\ln(1+e^{-x})+C$ (Ne pas oublier le signe moins).

Donc $u_1=[F_1(x)]_0^1=-\ln(1+e^{-1})+\ln(1+e^{-0})$

Donc $u_1=-\ln\left(1+\dfrac{1}{e}\right)+\ln 2=-\ln\left(\dfrac{e+1}{e}\right)+\ln 2=\ln\left(\dfrac{e}{e+1}\right)+\ln 2$.

Conclusion : $u_1=\ln\left(\dfrac{2e}{e+1}\right)$.

1°.b) Montrer que $u_0+u_1=1$.

$$u_0+u_1=\int_0^1 f_0(x)dx+\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1\big(f_0(x)+f_1(x)\big)dx$$

Donc : $u_0+u_1=\int_0^1\left(\dfrac{1}{1+e^{-x}}+\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx$

Par suite $u_0+u_1=\int_0^1 1\,dx=[x]_0^1=1-0=1$ CQFD.

1°.c) En déduire la valeur exacte de u_0.

D'après ce qui précède, nous savons que : $u_0+u_1=1$, donc $u_0=1-u_1$.

Et d'après la question 1°.a) nous savons que $u_1=\ln\left(\dfrac{2e}{e+1}\right)$, qu'on pourrait décomposer d'une autre manière sachant que $\ln e=1$:

$u_1=\ln\left(\dfrac{2e}{e+1}\right)=\ln\left(\dfrac{2}{e+1}\right)+\ln e=\ln\left(\dfrac{2}{e+1}\right)+1$. Donc

$u_0=1-u_1=1-\left[\ln\left(\dfrac{2}{e+1}\right)+1\right]=-\ln\left(\dfrac{2}{e+1}\right)$. **Conclusion** : $u_0=\ln\left(\dfrac{e+1}{2}\right)$ CQFD.

2°.a) Démontrer que pour tout $x > 0$ et tout entier naturel n : $e^{-nx-x} \leqslant e^{-nx}$

On commence par transformer cette expression : $\left[e^{-nx-x} \leqslant e^{-nx}\right] \Leftrightarrow \left[e^{-(n+1)x} \leqslant e^{-nx}\right]$.
Ce qui constitue une écriture *plus simple* !

1ère méthode : On fait un raisonnement par récurrence :
Pour chaque entier naturel n, on appelle P_n la proposition logique :

P_n : [Pour tout $x > 0$: $e^{-(n+1)x} \leqslant e^{-nx}$]

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

i) Initialisation :
Pour $n=0$, P_0 s'écrit : [pour tout $x > 0$: $e^{-x} \leqslant 1$].
Or, nous savons que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Donc pour tout $x > 0$, on a : $-x < 0$, donc : $e^{-x} \leqslant e^{0}$. Ce qui donne $e^{-x} \leqslant 1$.
Donc P_0 est vraie.

ii) Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie.
Par hypothèse de récurrence P_n est vraie. Donc : [Pour tout $x > 0$: $e^{-(n+1)x} \leqslant e^{-nx}$].
Or pour tout $x > 0$: $e^{-x} > 0$. Donc en multipliant par e^{-x}, on obtient :
Pour tout $x > 0$: $e^{-x} \times e^{-(n+1)x} \leqslant e^{-x} \times e^{-nx}$
Donc, pour tout $x > 0$: $e^{-(n+1)x-x} \leqslant e^{-nx-x}$
Donc, pour tout $x > 0$: $e^{-(n+1)x-x} \leqslant e^{-nx-x}$
Ce qui montre que : P_{n+1} est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$: [$e^{-(n+1)x} \leqslant e^{-nx}$].

2ème méthode : On pose $q = e^{-x}$ et on remarque que pour tout $x > 0$: $0 < q < 1$.
Donc la suite géométrique (q^n) est strictement décroissante. Donc pour tout entier n :
$q^{n+1} \leqslant q^n$. Ce qui donne, pour tout entier naturel n et tout $x > 0$: $e^{-(n+1)x} \leqslant e^{-nx}$.
C'est plus court et tout aussi élégant !

2°.b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n)

Afin de comparer intégrales, il faut commencer par comparer les fonctions.
On sait que, pour tout $x > 0$: $1 + e^{-x} > 0$. Donc, d'après ce qui précède :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$: $e^{-(n+1)x} \leqslant e^{-nx}$ donc, en divisant par $1 + e^{-x} > 0$:
Pour tout $x > 0$: $\dfrac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} \leqslant \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$. Donc, pour tout $x > 0$: $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$
D'après la conservation de l'ordre par les intégrales et $0 < 1$, on a :

$$\int_0^1 f_{n+1}(x)dx \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,dx$$. Ce qui donne : $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Conclusion : La suite (u_n) est décroissante

3°) Démontrer que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 e^{-nx}\,dx$

On sait que, pour tout $x > 0$, on a : $0 < e^{-x} \leqslant 1$. Donc en ajoutant 1 :
$1+0 < 1+e^{-x} \leqslant 2$.

Donc, en prenant l'inverse : $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+e^{-x}} \leqslant 1$. Par conséquent : $0 \leqslant \frac{1}{1+e^{-x}} \leqslant 1$.

Maintenant, en multipliant par $e^{-nx} > 0$, pour tout $x > 0$, on a : $0 \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \leqslant e^{-nx}$

D'après la conservation de l'ordre par les intégrales et $0 < 1$, on a :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-nx}\,dx$$

Conclusion : $0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 e^{-nx}\,dx$

4°.a) Calculer l'intégrale $I_n = \int_0^1 e^{-nx}\,dx$

Il faut chercher une primitive de la fonction g définie par : $g(x) = e^{-nx}$
On pose : $u(x) = -nx$ donc : $u'(x) = -n$.

Puis, On transforme $g(x)$ en fonction de u et de u'. Par suite : $g(x) = \frac{1}{-n} \times (-n) e^{-nx}$.

qu'on peut aussi écrire : $g(x) = \frac{1}{-n} \times u' e^{u}$. Or, une primitive de $u' e^{u}$ est : $e^{u} + C$.

Donc une primitive de g est la fonction G définie par : $G(x) = \frac{-1}{n} e^{-nx} + C$

Donc $I_n = [G(x)]_0^1 = \frac{-1}{n} e^{-n} - \frac{-1}{n} e^{0} = \frac{1}{n}\left(1-e^{-n}\right)$

Conclusion : $I_n = \frac{1}{n}\left(1-e^{-n}\right)$.

4°.b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

D'après la question précédente, on sait que : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n \leqslant I_n$.
Il suffit de calculer la limite de I_n lorsque n tend vers l'infini.

Or, d'une part : $\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{n}\right] = 0$. Et d'autre part : $\lim_{n \to +\infty} \left[e^{-n}\right] = \lim_{x \to -\infty} \left[e^{x}\right] = 0$

donc $\lim_{n \to +\infty} \left(1-e^{-n}\right) = 1$. Comme $I_n = \frac{1}{n}\left(1-e^{-n}\right)$, par produit des limites, nous obtenons : $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Conclusion : D'après le théorème de comparaison (ou des Gendarmes), on peut affirmer que la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

OUF !