Nombres complexes
(1ère partie)

Exercice n°1. Bac Asie, Juin 2002 (modifié)

1°) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives :

3 ; $4i$; $-2+3i$ et $1-i$.

a) Placer les points A, B, C et D dans le plan.
b) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier votre réponse.

2°) On considère dans l'ensemble des nombres complexes, les deux équations :

$$z^2-(1+3i)z-6+9i=0 \quad (1) \quad \text{et} \quad z^2-(1+3i)z+4+4i=0 \quad (2)$$

a) Montrer que l'équation (1) admet une solution réelle z_1
b) Montrer que l'équation (2) admet une solution imaginaire pure z_2 .
c) Montrer qu'il existe des nombres complexes *a, b, c* et *d* tels que

$$z^2-(1+3i)z-6+9i=(z-3)(az+b)$$

et $$z^2-(1+3i)z+4+4i=(z-4\mathrm{i})(cz+d)$$

d) En déduire les ensembles de solutions des équations (1) et (2).

Exercice n°2. Bac Nouvelle Calédonie, Décembre 2001 (modifié)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 4 cm. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, *i* désigne le nombre imaginaire pure de module 1.

On considère le point A, d'affixe $z_A=-i$. A tout point M d'affixe *z*, M différent de A, on associe le point M' d'affixe *z'*, défini par : $z'=\dfrac{iz-2}{z+i}$

1°) Démontrer que si *z* est imaginaire pure et $z\neq -i$, alors *z'* est imaginaire pure.
2°) Déterminer l'ensemble E_1 des points M, dont les affixes vérifient : $z'=z$.
3°) Déterminer l'ensemble E_2 des points M tels que M' soit le symétrique de M par rapport à O.
4°) Déterminer l'ensemble E_3 des points M tels que z' soit un nombre réel.
5°) Déterminer l'ensemble E_4 des points M tels que z' soit imaginaire pur.

Exercice n°3. BAC

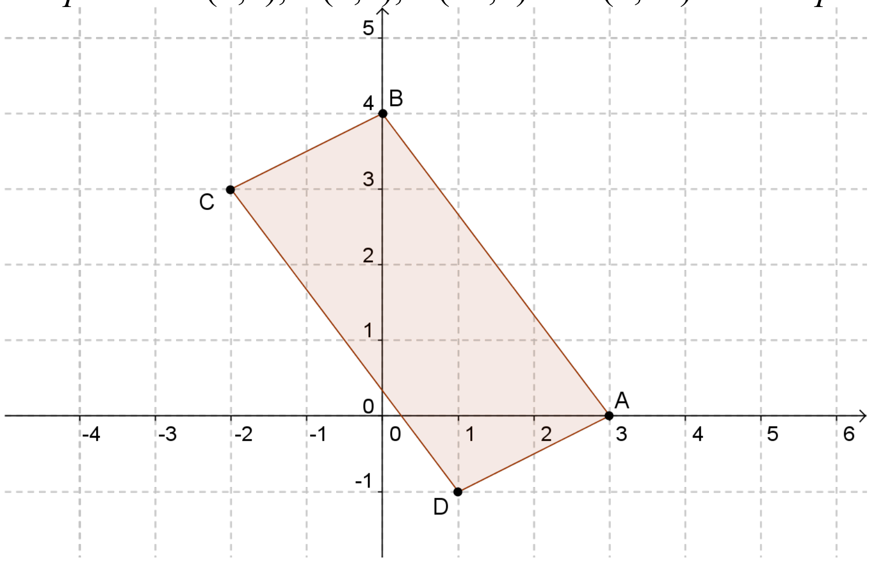
Pour tout nombre complexe z , on poase $P(z)=z^4-1$
1°) Factoriser $P(z)$ dans $\mathbb{C}$.
2°) En déduire les solutions, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, de l'équation $P(z)=0$.
3°) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4=1$ d'inconnue *z*.

Exercice n°1 corrigé :

1°.a) Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives dans le plan complexe

$$z_A=3 \quad ; \quad z_B=4i \quad ; \quad z_C=-2+3i \quad \text{et} \quad z_D=1-i \quad .$$

Ceci correspond à A(3;0), B(0;4), C(–2;3) *et* D(1;–1) *dans le plan réel !*



b) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier votre réponse.

On doit d'abord émettre une conjecture qui doit commencer par « il semble que...»
Graphiquement, il semble que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

Pour cela, il suffit de démontrer une égalité de deux vecteurs : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ou bien $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Pour démontrer l'égalité de deux vecteurs dans le plan complexe, il suffit de montrer qu'ils ont la même affixe :

On a : $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=4i-3$

et $z_{\overrightarrow{DC}}=z_C-z_D=(-2+3\mathrm{i})-(1-i)=-2+3i-1+i=-3+4i$

Par conséquent : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,

Conclusion : Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Remarque : *On pourrait également démontrer que « les diagonales se coupent en leurs milieux ».*

Soient M le milieu du segment [AC] et N le milieu du segment [BD]. On a :

$$z_M=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{3+(-2+3i)}{2}=\frac{1+3i}{2} \quad \text{et} \quad z_N=\frac{z_B+z_D}{2}=\frac{4i+(1-i)}{2}=\frac{1+3i}{2}$$

Les deux points M et N ont la même affixe, donc ils sont confondus : M = N.

Conclusion : Dans le quadrilatère ABCD, les diagonales se coupent en leurs milieux, donc ABCD est un parallélogramme. ■

2°.a) Montrons que l'équation (1) admet une solution réelle z_1

$$(1) : \quad z^2-(1+3i)z-6+9i=0$$

Pour cela, on pose : $z = x$, avec $x \in \mathbb{R}$.

On a alors : $\quad (1) \Leftrightarrow x^2-(1+3i)x-6+9i=0$

$\Leftrightarrow x^2-x-6+i(-3x+9)=0$

Or, un nombre complexe est nul si et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont (toutes les deux) nulles. Donc

$(1) \Leftrightarrow x^2-x-6=0$ et $-3x+9=0$

$\Leftrightarrow x^2-x-6=0$ et $x=3$

$\Leftrightarrow x=3$

puisque $x = 3$ est aussi solution de la première équation.

Conclusion : L'équation (1) admet une solution réelle : $z_1 = 3$. ■

2°.b) Montrons que l'équation (2) admet une solution imaginaire pure z_2 .

$$(2) : \quad z^2-(1+3i)z+4+4i=0$$

Pour cela, on pose : $z = iy$, avec $y \in \mathbb{R}$.

On a alors : $\quad (2) \Leftrightarrow (iy)^2-(1+3i)iy+4+4i=0$

$\Leftrightarrow -y^2-1\times iy-3i\times iy+4+4i=0$

$\Leftrightarrow -y^2-1\times iy-3i\times iy+4+4i=0$

$\Leftrightarrow -y^2+3y+4+i(4-y)=0$

Or, un nombre complexe est nul si et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont (toutes les deux) nulles. Donc

$(2) \Leftrightarrow -y^2+3y+4=0$ et $4-y=0$

$\Leftrightarrow -y^2+3y+4=0$ et $y=4$

$\Leftrightarrow y=4$

puisque $y = 4$ est aussi solution de la première équation.

Conclusion : L'équation (2) admet une solution imaginaire pure : $z_2 = 4i$. ■

2°.c) Montrons qu'il existe deux nombres complexes a et b tels que

$$z^2-(1+3i)z-6+9i=(z-3)(az+b)$$

Il suffit de développer le membre de droite et procéder par identification des coefficients. On a donc :

$$(z-3)(az+b)=az^2+bz-3az-3b$$
$$= az^2+(b-3a)z-3b$$

Par identification avec les coefficients du membre de gauche, on a :

$$\begin{cases} a=1 \\ b-3a=-1-3i \\ -3b=-6+9i \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a=1 \\ b=2-3i \end{cases} .$$

Conclusion : On a la factorisation : $z^2-(1+3i)z-6+9i=(z-3)(z+2-3i)$ ■

2°.c') Montrons qu'il existe deux nombres complexes *c* et *d* tels que

$$z^2-(1+3i)z+4+4i=(z-4\mathrm{i})(cz+d)$$

On procède de la même manière : il suffit de développer le membre de droite et procéder par identification des coefficients. On a donc :

$$(z-4i)(cz+d)=cz^2+dz-4icz-4id$$
$$= cz^2+(d-4ic)z-4id$$

Par identification avec les coefficients du membre de gauche, on a :

$$\begin{cases} c=1 \\ d-4ic=-1-3i \\ -4id=4+4i \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} c=1 \\ d=-1-3i+4i \\ -id=1+i \end{cases} \quad \begin{cases} c=1 \\ d=-1+i \end{cases}.$$

Conclusion : On a la factorisation : $z^2-(1+3i)z+4+4i=(z-4\mathrm{i})(z-1+i)$ ■

d) En déduire les ensembles de solutions des équations (1) et (2).

Résolution de l'équation (1)

On utilise le théorème du produit nul dans $\mathbb{C}$ *:*

$$(1) \Leftrightarrow (z-3)(z+2-3i)=0$$
$$\Leftrightarrow z-3=0 \text{ ou } z+2-3i=0$$
$$\Leftrightarrow z=3 \text{ ou } z=-2+3i$$

Conclusion : Cette équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1=3 \text{ et } z_1'=-2+3i$$

Par conséquent : $S_1=\{z_1 ; z_1'\}$, qu'on peut aussi écrire : $S_1=\{3 ; -2+3i\}$

Résolution de l'équation (2)

On utilise le théorème du produit nul dans $\mathbb{C}$ *:*

$$(2) \Leftrightarrow (z-4\mathrm{i})(z-1+i)=0$$
$$\Leftrightarrow z-4i=0 \text{ ou } z-1+i=0$$
$$\Leftrightarrow z=4i \text{ ou } z=1-i$$

Conclusion : Cette équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_2=4i \text{ et } z_2'=1-i$$

Par conséquent : $S_2=\{z_2 ; z_2'\}$, qu'on peut aussi écrire : $S_1=\{4i ; 1-i\}$ ■

Exercice n°2 corrigé :

Soit M(z), $M \neq A$. On lui associe le point M' d'affixe z', défini par : $z' = \dfrac{iz-2}{z+i}$

1°) Montrons que si z est imaginaire pure et $z \neq -i$, alors z' est imaginaire pure.

On pose $z = iy$, avec $y \in \mathbb{R}$. On a alors :

Dire que $z \neq -i$ équivaut à dire que $iy \neq -i$ donc $y \neq -1$. Donc $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$z' = \frac{i(iy)-2}{iy+i} = \frac{-y-2}{i(y+1)} = \frac{-i \times (-y-2)}{-i \times i(y+1)} = i\frac{(y+2)}{y+1}$$

Or $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc $(y+2) \in \mathbb{R}$ et $(y+1) \in \mathbb{R}^*$. Donc $\dfrac{(y+2)}{y+1} \in \mathbb{R}$

Conclusion : z' est imaginaire pur. ■

2°) Déterminer l'ensemble E_1 des points M, dont les affixes vérifient : $z' = z$.

Pour tout $z \neq -i$ on a les équivalences suivantes :

$$z' = z \Leftrightarrow \frac{iz-2}{z+i} = z \quad (\textit{On remplece } z' \textit{ par son expression en fonction de } z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{iz-2}{z+i} - z = 0 \quad (\textit{On réduit l'équation})$$

$$\Leftrightarrow \frac{iz-2-z(z+i)}{z+i} = 0 \quad (\textit{On réduit au même dénominateur})$$

$$\Leftrightarrow \frac{iz-2-z^2-iz}{z+i} = 0 \quad (\textit{On développe le numérateur})$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2-z^2}{z+i} = 0 \quad (\textit{On réduit l'équation})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2-z^2=0 \\ \text{et } z+i \neq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \textit{Une fraction est nulle si son numérateur est nul} \\ \textit{et son dénominateur est non nul} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2+2=0 \\ \text{et } z \neq -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2=-2 \\ \text{et } z \neq -i \end{cases}$$

Arrivé ici, on peut utiliser deux méthodes :

- Soit calculer le discriminant avec $a = 1$, $b = 0$ et $c = 2$.

  $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 2 = -8$. Donc deux solutions :

  $$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-0-i\sqrt{8}}{2 \times 1} = \frac{-i2\sqrt{2}}{2} = -i\sqrt{2}$$

  $$z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-0+i\sqrt{8}}{2 \times 1} = \frac{i2\sqrt{2}}{2} = i\sqrt{2}$$

- Soit, directement, poser : $z^2 = -2 \Leftrightarrow z^2 = i^2 \times 2 \Leftrightarrow z^2 = (i \times \sqrt{2})^2$

  Ce qui donne les deux solutions : $z_1 = -i\sqrt{2}$ ou $z_2 = i\sqrt{2}$

Conclusion : Soient M_1 le point d'affixe z_1 et M_2 le point d'affixe z_2. Alors

$E_1 = \{M_1 ; M_2\}$. ■

3°) Déterminer l'ensemble E_2 des points M tels que M' soit le symétrique de M par rapport à O.

M' soit le symétrique de M par rapport à O signifie que $z' = -z$.
Donc, pour tout $z \neq -i$ on a les équivalences suivantes :

$$z' = -z \Leftrightarrow \frac{iz-2}{z+i} = -z \quad (\textit{On remplece } z' \textit{ par son expression en fonction de } z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{iz-2}{z+i} + z = 0 \quad (\textit{On réduit l'équation})$$

$$\Leftrightarrow \frac{iz-2+z(z+i)}{z+i} = 0 \quad (\textit{On réduit au même dénominateur})$$

$$\Leftrightarrow \frac{iz-2+z^2+iz}{z+i} = 0 \quad (\textit{On développe le numérateur})$$

$$\Leftrightarrow \frac{z^2+2iz-2}{z+i} = 0 \quad (\textit{On réduit le numérateur})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2+2iz-2=0 \\ \text{et } z+i \neq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \textit{Une fraction est nulle si son numérateur est nul} \\ \textit{et son dénominateur est non nul} \end{matrix}$$

Arrivé ici, on peut utiliser *la forme canonique du trinôme du second degré* en z :

$$z^2+2iz-2 = (z+i)^2 - i^2 - 2 = (z+i)^2 - 1 \ .$$

Donc $z^2+2iz-2=0 \Leftrightarrow (z+i)^2-1=0 \Leftrightarrow (z+i)^2=1$
$\Leftrightarrow z+i=1$ ou $z+i=-1$

Ce qui donne les deux solutions : $z_3 = 1-i$ ou $z_4 = -1-i$

<u>Conclusion</u> : Soient M_3 le point d'affixe z_3 et M_4 le point d'affixe z_4. Alors

$$E_2 = \{M_3 ; M_4\} \ .$$

■

4°) Déterminer l'ensemble E_3 des points M tels que z' soit un nombre réel.

z' est un nombre réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

Ici, on n'a pas le choix, il faut utiliser la forme algébrique pour séparer z' en partie réelle et partie imaginaire :

On pose $z = x+iy$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Alors $z \neq -i \Leftrightarrow (x ; y) \neq (0 ; -1)$.
On peut maintenant exprimer z' sous la forme algébrique :

$$z' = \frac{iz-2}{z+i} = \frac{i(x+iy)-2}{x+iy+i} = \frac{ix-(y+2)}{x+i(y+1)} = \frac{[ix-(y+2)][x-i(y+1)]}{[x+i(y+1)][x-i(y+1)]}$$

Donc $$z' = \frac{ix^2+x(y+1)-(y+2)x+i(y+2)(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$$

qu'on peut séparer en partie réelle et partie imaginaire :

$$z' = \frac{x(y+1)-(y+2)x}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{x^2+(y+2)(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$$

z' est *un nombre réel* si et seulement si *sa partie imaginaire est nulle*. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(z')=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2+(y+2)(y+1)}{x^2+(y+1)^2}=0\\
&\Leftrightarrow \quad x^2+(y+2)(y+1)=0\\
&\Leftrightarrow \quad x^2+(y+2)(y+1)=0\\
&\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+3y+2=0\\
&\Leftrightarrow \quad x^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=0\\
&\Leftrightarrow \quad x^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0\\
&\Leftrightarrow \quad (x-0)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Soit Ω le point de coordonnées $\left(0;\frac{-3}{2}\right)$ ou d'affixe $z_\Omega=\frac{-3i}{2}$ et $r=\frac{1}{2}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(z')=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \Omega M^2=r^2\\
&\Leftrightarrow \quad \Omega M=r\\
&\Leftrightarrow \quad M\in C(\Omega,r)
\end{aligned}$$

<u>Conclusion</u> : E$_3$ est le cercle de centre Ω et de rayon $r=\frac{1}{2}$. ■

<u>5°) Déterminer l'ensemble E$_4$ des points M tels que</u> z' <u>soit imaginaire pur</u>.

$z\neq -i \Leftrightarrow (x;y)\neq(0;-1)$. z' est imaginaire pur (ssi) sa partie réelle est nulle. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z')=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x(y+1)-(y+2)x}{x^2+(y+1)^2}=0\\
&\Leftrightarrow \quad x(y+1)-(y+2)x=0\\
&\Leftrightarrow \quad xy+x-yx-2x=0\\
&\Leftrightarrow \quad -x=0\\
&\Leftrightarrow \quad x=0
\end{aligned}$$

Attention !! Il ne faut pas oublier d'exclure les points associés aux valeurs interdites.

Ici, $z\neq -i$ signifie que, si $x = 0$, il faut que $y\neq -1$.

<u>Conclusion</u> : E$_4$ est l'axe des ordonnées du repère (c'est-à-dire la droite d'équation $x=0$) privé du point A d'affixe $z_A = -i$ (A de coordonnées (0;–1)). ■

Exercice n°3 corrigé :

Pour tout nombre complexe z , on poase $P(z)=z^4-1$

1°) Factoriser $P(z)$ dans $\mathbb{C}$.

2°) En déduire les solutions, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, de l'équation (1) $P(z) = 0$.

3°) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (2) : $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4=1$ d'inconnue z.

1°) Factoriser $P(z)$ dans $\mathbb{C}$

On pose $Z=z^2$. Alors $P(z)=(z^2)^2-1=Z^2-1=(Z-1)(Z+1)$. C'est une IR n°3.

D'autre part $Z-1=z^2-1=(z-1)(z+1)$ et $Z+1=z^2-i^2=(z-i)(z+i)$

Conclusion : la factorisation de $P(z)$ dans $\mathbb{C}$ est :

$$P(z)=(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$$

2°) En déduire les solutions, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, de l'équation (1) $P(z) = 0$.

Il n'y a aucune valeur interdite. Donc le domaine de validité de cette équation est $D_1=\mathbb{C}$. Donc, d'après le *théorème du produit nul* dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} P(z)=0 &\Leftrightarrow (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)=0 \\ &\Leftrightarrow z-1=0 \text{ ou } z+1=0 \text{ ou } z-i=0 \text{ ou } z+i=0 \\ &\Leftrightarrow z=1 \text{ ou } z=-1 \text{ ou } z=i \text{ ou } z=-i \end{aligned}$$

Conclusion : Cette équation admet quatre solutions dans $\mathbb{C}$. Donc

$$S=\{1\,;-1\,;i\,;-i\}$$

3°) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (2) : $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4=1$ d'inconnue z.

1ère étape : *Pour résoudre cette équation, nous commençons d'abord par (1er réflexe, avant tout !)* chercher le domaine de validité de l'équation.

Ici, il y a une valeur interdite. $z\in D_2 \Leftrightarrow \dfrac{2z+1}{z-1}$ existe $\Leftrightarrow z\neq 1$.

Par conséquent, le domaine de validité de cette équation est $D_2=\mathbb{C}\setminus\{1\}$

2ème étape : *On effectue un changement de variable pour se ramener au cas précédent :* Pour tout $z\neq 1$, on pose $Z=\dfrac{2z+1}{z-1}$. L'équation (2) devient :

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4=1 \Leftrightarrow \left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4-1=0 \Leftrightarrow Z^4-1=0 \\ &\Leftrightarrow P(Z)=0 \Leftrightarrow Z=1 \text{ ou } Z=-1 \text{ ou } Z=i \text{ ou } Z=-i \end{aligned}$$

d'après la question 1°).

$$\Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-1}=1 \text{ ou } \frac{2z+1}{z-1}=-1 \text{ ou } \frac{2z+1}{z-1}=i \text{ ou } \frac{2z+1}{z-1}=-i$$

Ce qui revient à résoudre 4 "petites" équations du 1er degré !! avec valeur interdite, produits en croix ... *À TERMINER ../..*