Fiche BAC 02 *Terminale S*

Calcul des limites de Suites numériques

Exercice n°1

Calculer les limites des suites suivantes lorsqu'elles existent. Justifier votre réponse.
Pour tout entier n :

1°) $u_n = n^2 - 3n + 5$ 2°) $v_n = \dfrac{2n^2 - 3}{n^2 + n + 1}$

3°) $w_n = \sqrt{n^2 + 3} - n$ 4°) $t_n = \dfrac{2 + 3\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$

Exercice n°2

<u>1ère partie</u> : On considère la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

a) A l'aide de votre calculatrice, calculer les quatre premiers termes de cette suite.
b) Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$
c) Démontrer par récurrence, que la suite (u_n) est strictement croissante.
d) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
e) Déterminer la limite de la suite (u_n).

<u>2ème partie</u> :

On considere la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_n$ et on donne l'algorithme suivant :

```
VARIABLES
N EST DU TYPE NOMBRE
I EST DU TYPE NOMBRE
U EST DU TYPE NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
U PREND LA VALEUR 0
LIRE N
POUR I ALLANT DE 1 A N
DEBUT POUR
U PREND LA VALEUR sqrt{2*U+3}
FIN POUR
AFFICHER U
FIN ALGORITHME
```

a) Analyser le fonctionnement de cet algorithme.
b) Modifier cet algorithme afin qu'il affiche la valeur de S_N lorsque l'utilisateur entre la valeur de N.

Exercice n°3 (<u>*Même exercice avec « **la fonction associée** »*</u>)

On considère la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1° a) A l'aide de votre calculatrice, calculer les quatre premiers termes de cette suite.
b) Faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2°) On considère la fonction définie pour $x \in [0;3]$ par : $f(x) = \sqrt{2x + 3}$.
a) Calculer la dérivée de la fonction f.
b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0;3]$ et dresser son tableau de variations. Préciser les valeurs de de la fonction aux bornes de cet intervalle.
c) Démontrer que : [si $x \in [0;3]$ alors $f(x) \in [0;3]$].
d) Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$
e) Démontrer par récurrence, que la suite (u_n) est strictement croissante.
f) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
g) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Corrigé

Exercice n°1

1°) Limite de $u_n = n^2 - 3n + 5$. Il est clair que $\lim\limits_{n \to +\infty} [n^2] = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} [3n] = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} [n^2 - 3n + 5] = (+\infty) - (+\infty) = F.\,I.$. Il faut transformer l'écriture de u_n pour « *lever l'indétermination* ». Pour cela, « *on met en facteur le monôme de plus haut degré* ».
On écrit :

$$u_n = n^2 - 3n + 5 = n^2\left(1 - \frac{3n}{n^2} + \frac{5}{n^2}\right) = n^2\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right) \quad .$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\frac{-3}{n}\right] = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\frac{5}{n^2}\right] = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = 1$.

D'autre part : $\lim\limits_{n \to +\infty} [n^2] = +\infty$.

Par conséquent, par produit des limites, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = +\infty \times 1 = +\infty$

<u>Conclusion</u> : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

2°) Limite de $v_n = \dfrac{2n^2 - 3}{n^2 + n + 1}$. Il est clair que $\lim\limits_{n \to +\infty} [2n^2 - 3] = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} [n^2 + n + 1] = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left[\frac{2n^2 - 3}{n^2 + n + 1}\right] = \frac{+\infty}{+\infty} = F.\,I.$. Il faut transformer l'écriture de u_n pour « *lever l'indétermination* ». Pour cela, « *on met en facteur le monôme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur* ». On écrit :

$$2n^2 - 3 = 2n^2\left(1 - \frac{3}{2n^2}\right) = 2n^2\left(1 - \frac{3}{2n^2}\right) \quad \text{et} \quad n^2 + n + 1 = n^2\left(1 + \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) = n^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

Par suite, nous pouvons écrire :

$$v_n = \frac{2n^2 - 3}{n^2 + n + 1} = \frac{2n^2\left(1 - \frac{3}{2n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2\left(1 - \frac{3}{2n^2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}$$

On simplifie par n^2 . Chaque parenthèse au numérateur et au dénominateur tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini (voir ci-dessus). Par conséquent, par produit et quotient des limites, la suite (v_n) tend vers 2.

<u>Conclusion</u> : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$.

3°) Limite de $w_n = \sqrt{n^2 + 3} - n$. Il est clair que $\lim\limits_{n \to +\infty} [n^2 + 3] = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n^2 + 3} = +\infty$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} [n] = +\infty$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} [\sqrt{n^2 + 3} - n] = (+\infty) - (+\infty) = F.\,I.$

Il faut transformer l'écriture de u_n pour « *lever l'indétermination* ». Ici, l'expression de (w_n) n'est pas un polynôme ; c'est une différence entre une racine carrée et un polynôme. Nous allons « *multiplier par la quantité conjuguée* » en utilisant l'identité remarquable n°3 :

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ sous la forme suivante : $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$. On écrit :

$$w_n=\sqrt{n^2+3}-n=\frac{\sqrt{n^2+3}-n}{1}$$

$$w_n=\frac{(\sqrt{n^2+3}-n)(\sqrt{n^2+3}+n)}{(\sqrt{n^2+3}+n)}$$

Avec l'IR n°3 : $$w_n=\frac{n^2+3-n^2}{\sqrt{n^2+3}+n}=\frac{3}{\sqrt{n^2+3}+n}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+3}=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}[n]=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+3}+n=+\infty$.

Le numérateur est une constante positive et le dénominateur tend vers $+\infty$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{n^2+3}+n}=0$$

Conclusion : $$\lim_{n\to+\infty}w_n=0$$

4°) $t_n=\dfrac{2+3\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$, $n>0$.

Pour calculer cette limite, il faut se débarrasser du sinus. C'est un terme qui n'a pas de limite [*du tout*] lorsque n tend vers $+\infty$. Par contre, on sait que le sinus d'un nombre réel est compris entre –1 et 1. Donc, on peut utiliser le théorème de comparaison en faisant un « encadrement » du terme général de la suite par des suites dont on connaît les limites (finies ou infinies !).

On sait que pour tout $x\in\mathbb{R}, -1\leqslant\sin x\leqslant 1$

Donc, en particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}, -1\leqslant\sin n^2\leqslant 1$,

Donc, $-3\leqslant 3\sin n^2\leqslant 3$

Donc, $2-3\leqslant 2+3\sin n^2\leqslant 2+3$

En divisant les trois membres par $\sqrt{n}>0$, on obtient :

$$\frac{-1}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{2+3\sin n^2}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{5}{\sqrt{n}}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{-1}{\sqrt{n}}\right]=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{5}{\sqrt{n}}\right]=0$. Ces deux suites sont convergentes et tendent vers la même limite finie 0. Donc, d'après le théorème de comparaison [dit des gendarmes], on peut affirmer que la suite (t_n) est convergente et tend vers la même limite 0.

Conclusion : $$\lim_{n\to+\infty}t_n=0$$

Corrigé

Exercice n°2

1°) *A l'aide de votre calculatrice, calculer les quatre premiers termes de cette suite.*

On met la calculatrice en **Mode « Suites »** (ou **Seq**), puis on rentre les données dans la calculatrice (ex. sur une TI): **nMin = 0**, **u(n)= V̄(2*u(n-1)+3)** ;**u(nMin)= 0**, (**V̄= touche racine carrée**) et on appuie sur la touche **TABLE** puis on lit directement les valeurs :

$u_0=0$; $u_1=1{,}7321\ldots$; $u_2=2{,}5425\ldots$; $u_3=2{,}8434\ldots$; $u_4=2{,}9473\ldots$;...

2°) *Démontrer par récurrence, que pour tout entier n,* $0 \leqslant u_n \leqslant 3$

Pour chaque entier n, on appelle P_n la proposition logique:[$0 \leqslant u_n \leqslant 3$].
Montrons par récurrence que : Pour tout entier n : [P_n est vraie].

Initialisation

Pour $n = 0$: $u_0 = 0$ donc : $0 \leqslant u_0 \leqslant 3$ Donc P_0 est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que P_n est vraie. (Hypothèse de récurrence).

Montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que : $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ (HR)

En multipliant par 2 les trois membres, on obtient : $2 \times 0 \leqslant 2 \times u_n \leqslant 2 \times 3$

Donc $0 \leqslant 2u_n \leqslant 6$. Puis en ajoutant 3 aux trois membres, on obtient :

$0+3 \leqslant 2u_n+3 \leqslant 6+3$ Ce qui donne : $3 \leqslant 2u_n+3 \leqslant 9$.

Or, la fonction « racine carrée » est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, donc :

$\sqrt{3} \leqslant \sqrt{2u_n+3} \leqslant \sqrt{9}$. Donc $\sqrt{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

Et comme $0 \leqslant \sqrt{3}$, on a bien : $0 \leqslant \sqrt{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$, donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$

Ce qui montre que P_{n+1} est vraie. Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion. Pour tout entier n : $0 \leqslant u_n \leqslant 3$

3°) *Démontrer par récurrence, que la suite (u_n) est strictement croissante.*
C'est-à-dire : Pour tout entier n, $u_n < u_{n+1}$.

Pour chaque entier n, on appelle P_n la proposition logique:[$u_n < u_{n+1}$].
Montrons par récurrence que : Pour tout entier n : [P_n est vraie].

Initialisation

Pour $n = 0$: $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{3}$ donc : $u_0 < u_1$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que P_n est vraie. (Hypothèse de récurrence).

Montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que : $u_n < u_{n+1}$ (HR)

En multipliant par 2 les deux membres, on obtient : $2 \times u_n < 2 \times u_{n+1}$

Puis en ajoutant 3 aux trois membres, on obtient : $2u_n+3 < 2u_{n+1}+3$

Or, la fonction « racine carrée » est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, donc :

$\sqrt{2u_n+3} < \sqrt{2u_{n+1}+3}$. Donc $u_{n+1} < u_{n+2}$.

Ce qui montre que P_{n+1} est vraie. Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion. Pour tout entier n :. $u_n < u_{n+1}$.

Donc, la suite (u_n) est strictement croissante.

4°) *Démontrer que la suite (u_n) est convergente.*

D'après ce qui précède, la suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 3. Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n \to +\infty} u_n \leqslant 3$.

5°) *Déterminer la limite de la suite (u_n).*

La suite (u_n) est définie à l'aide d'une formule de récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n+3}, n \geqslant 0 \end{cases}$$

D'après la question précédente, on sait que la suite (u_n) est convergente.
On pose $\lim_{n\to+\infty} u_n=l$. Mais la suite (u_{n+1}) est aussi convergente et tend vers la même limite. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=l$.
Par conséquent, par unicité de la limite et d'après les relations d'encadrement des termes de la suite, l doit vérifier les deux conditions suivantes : $l=\sqrt{2l+3}$ et $0\leqslant l\leqslant 3$,
qu'on peut écrire sous la forme : $\begin{cases} l=\sqrt{2l+3} \\ 0\leqslant l\leqslant 3 \end{cases}$.
Puis, comme tous les termes de la suite sont positifs ou nuls, on élève au carré les deux membres, pour obtenir : $\begin{cases} l^2-2\mathrm{l}-3=0 \\ 0\leqslant l\leqslant 3 \end{cases}$.
Cette équation admet deux solutions [on calcule le discriminant, etc...] : $l=-1$ et $l=3$
Or $0\leqslant l\leqslant 3$, donc –1 ne peut pas être la limite de la suite. Par conséquent, $l=3$.

Conclusion : La suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n=3$.

2ème partie :

2° a) Analyser le fonctionnement de cet algorithme.
Cet algorithme calcule la valeur du terme U_N de la suite lorsque l'utilisateur entre la valeur de l'entier naturel N.

b) Modifier cet algorithme afin qu'il affiche la valeur S_N lorsque l'utilisateur entre la valeur de N.
Afin de calculer la somme des termes de la suite,

- Il faut *introduire une nouvelle variable* S après la ligne 4,
  S EST DU TYPE NOMBRE
- Il faut *initialiser la variable* S après la ligne 6,
  S PREND LA VALEUR 0
- Il faut *ajouter* U *à* S à chaque incrémentation, après la ligne 10,
  S PREND LA VALEUR S+U
- Enfin, après la ligne 10, *afficher* S.
  AFFICHER S

A SUIVRE...