Devoir Maison de mathématiques n° 2

à rendre le Vendredi 07 octobre

Exercice n°1 *Fonctions composées* (3 points)

On considère les fonctions de référence *u, v, w* et *r* définies par : $u(x)=ax+b$ (affine), $v(x)=x^2$ (carrée), $w(x)=\frac{1}{x}$ (inverse) et $r(x)=\sqrt{x}$ (racine carrée).

Décomposer les fonctions suivantes à l'aide des fonctions *u, v, w* et *r* :

$$f(x)=\frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2} \quad , \quad g(x)=\left(\frac{1}{2x+1}\right)^2 \quad , \quad h(x)=2\sqrt{x^2+1}+3$$

Pour chacune de ces fonctions, on choisira les valeurs de *a* et de *b* qui conviennent.

Exercice n°2 *Formes indéterminées* 0/0 (7 points)

Soient *f* et *g* les fonctions définies par : $f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$ $\quad g(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

1°) Déterminer les domaines de définition de *f* et *g*.

2°) Peut-on calculer les limites de *f* (*x*) et *g*(*x*) lorsque *x* tend vers 1 ? Justifier.

3°) On pose $N(x)=x^3-3x+2$ et $D(x)=x^2-4x+3$

a) Calculer *N*(1) et *D*(1).

b) Montrer qu'il existe trois réels *a, b* et *c* tels que $N(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$.

c) Factoriser *N*(*x*) puis *D*(*x*).

4°) Simplifier l'expression de *f*(*x*) pour $x\neq 1$ et en déduire la limite de *f* (*x*) lorsque *x* tend vers 1.

5°) En utilisant la quantité conjuguée du numérateur, simplifier l'expression de *g*(*x*) pour $x\neq 1$ et en déduire la limite de *g*(*x*) lorsque *x* tend vers 1.

Exercice n°3 *Formes indéterminées* 0/0 (4 points)

Soit *h* la fonction définie par : $h(x)=\frac{2x^2+3x}{x}$ et $k(x)=\frac{3x}{x^2+x}$

1°) Déterminer les domaines de définition de *h* et de *k*.

2°) Peut-on calculer les limites de *h*(*x*) et *k*(*x*) lorsque *x* tend vers 0 ? Justifier.

3°) Factoriser *h*(*x*) et *k*(*x*) pour $x\neq 0$ et en déduire les limites de *h*(*x*) et *k*(*x*) lorsque *x* tend vers 0.

Exercice 4 : *Asymptotes.* (6 points)

Soit *f* la fonction numérique de la variable réelle *x* définie par : $f(x)=\frac{3x^2+5x+5}{(x+1)^2}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Déterminer le domaine de définition de *f* et montrer que C_f admet une asymptote verticale.

2°) Montrer qu'il existe trois réels *a, b,* et *c* tels que : $f(x)=a+\frac{bx+c}{(x+1)^2}$

3°) Démontrer que C_f admet une asymptote Δ vers $+\infty$ et vers $-\infty$ dont on déterminera la nature

4°) Déterminer la position relative de la courbe C_f par rapport à l'asymptote Δ .

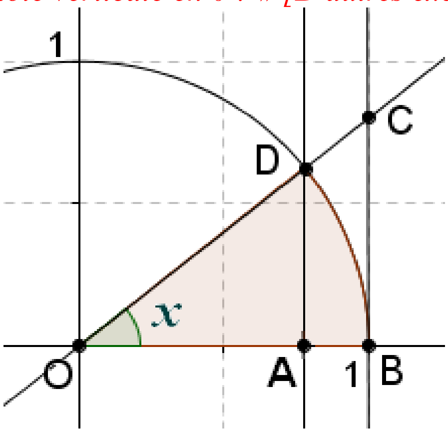
.. /..

FACULTATIF

Exercice 4 : *Asymptotes et valeurs interdites*. (4 points)

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

On se propose de répondre à cette question : « 0 est une valeur interdite pour cette fonction. A-t-on forcément une asymptote verticale en 0 ? » [D'autres exemples ex. n°2 et 3 ci-dessus].



Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et de rayon $OB=OD = 1$ et x désigne la mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})$.

1°) Exprimer $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ ($x > 0$) en fonction de OA, AD, OB et BC.

2°) On appelle A_1, A_2, et A_3, les aires du triangle OAD, du secteur circulaire OBD et du triangle OBC respectivement.

a) Calculer A_1, A_2, et A_3 en fonction de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$.

b) Ranger par ordre croissant A_1, A_2, et A_3 .

c) En déduire la double inégalité : $\cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x}$

d) Sachant que $\lim_{x\to 0^+} \cos x=1$ déduire de ce qui précède la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+ puis lorsque x tend vers 0^-. (On changera x en $-x$).

3°) La courbe représentative de f admet-elle une asymptote verticale en 0 ?

INDICATION

Rappel : Aire du disque de rayon R est $A=\pi R^2$ correspond à un angle plein 2π radians.

L'aire d'un secteur circulaire est *proportionnelle* à la mesure (en radian) de cet angle.