Probabilités continues et Loi normale

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Notion de loi à densité **à partir d'exemples** Loi à densité sur un intervalle.		Les exemples étudiés s'appuient sur une expérience aléatoire et un univers associé Ω, muni d'une probabilité. On définit alors une variable aléatoire X, fonction de Ω dans **R**, qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de **R**. On admet que X satisfait aux conditions qui permettent de définir la probabilité de l'événement $\{X \in J\}$ comme aire du domaine : $\{M(x, y)\ ;\ x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ où f désigne la fonction de densité de la loi et J un intervalle inclus dans I. Toute théorie générale des lois à densité et des intégrales sur un intervalle non borné est exclue.
Loi uniforme sur [*a*, *b*]. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme.	• Connaître la fonction de densité de la loi uniforme sur $[a, b]$.	L'instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou d'une calculatrice permet d'introduire la loi uniforme sur [0,1]. La notion d'espérance d'une variable aléatoire à densité sur $[a;b]$ est introduite à cette occasion par : $\int_a^b t\,f(t)\,dt$. On note que cette définition constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une variable aléatoire discrète. (*AP*) *Méthode de Monte-Carlo.*
Lois exponentielles. **Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.**	• Calculer une probabilité dans le cadre d'une loi exponentielle. ☐ Démontrer que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$.	On démontre qu'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement : pour tous réels t et h positifs, $P_{(T \geqslant t)}(T \geqslant t+h) = P(T \geqslant h)$ L'espérance est définie comme la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\int_0^x t\,f(t)\,dt$ où f est la fonction de densité de la loi exponentielle considérée. Cette partie du programme se prête particulièrement à l'étude de situations concrètes, par exemple sur la radioactivité ou la durée de fonctionnement d'un système non soumis à un phénomène d'usure.
2ème partie ✔ **Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.** **Théorème de Moivre-Laplace (admis).**	• Connaître la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et sa représentation graphique. ☐ Démontrer que pour $\alpha \in]0,1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que : $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1-\alpha$ lorsque X suit la loi normale $N(0,1)$. • Connaître les valeurs approchées : $u_{0,05} \approx 1{,}96$ et $u_{0,01} \approx 2{,}58$.	Pour introduire la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, on s'appuie sur l'observation des représentations graphiques de la loi de la variable aléatoire $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$; où X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et cela pour de grandes valeurs de n et une valeur de p fixée entre 0 et 1. Le théorème de Moivre Laplace assure que pour tous réels a et b, $P(Z_n \in [a,b])$ tend vers $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ lorsque n tend vers $+\infty$. L'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi $N(0,1)$ est définie par $\lim_{x\to-\infty} \int_x^0 tf(t)\,dt + \lim_{y\to+\infty} \int_0^y tf(t)\,dt$ où f désigne la densité de cette loi. On peut établir qu'elle vaut 0. On admet que la variance, définie par $\mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right)$, vaut 1.
2ème partie ✔ **Loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$** d'espérance μ et d'écart-type σ.	• Utiliser une calculatrice ou un tableur pour obtenir une probabilité dans le cadre d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. • Connaître une valeur approchée de la probabilité des événements suivants : $\{X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]\}$, $\{X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]\}$ et $\{X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]\}$, lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.	Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ si $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On fait percevoir l'information apportée par la valeur de l'écart-type. [*SI* et *SPC*] Mesures physiques sur un système réel en essai. La connaissance d'une expression algébrique de la fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ n'est pas un attendu du programme. On illustre ces nouvelles notions par des exemples issus des autres disciplines.

III. Loi normale centrée réduite

3.1) Le théorème (de) de MOIVRE-LAPLACE

Rappel :

Une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, de paramètres n et p, est une v. a. qui compte le nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes avec, $P(S) = p$. Les éléments caractéristiques d'une loi binomiale sont :

Propriétés :

Soit X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors, l'espérance, la variance et l'écart-type de X sont donnés par :

$$m = E(X) = np\ ,$$
$$V(X) = \sigma^2 = np(1-p)$$
$$\text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$$

On rappelle aussi les propriétés de l'espérance, la variance et l'écart-type.

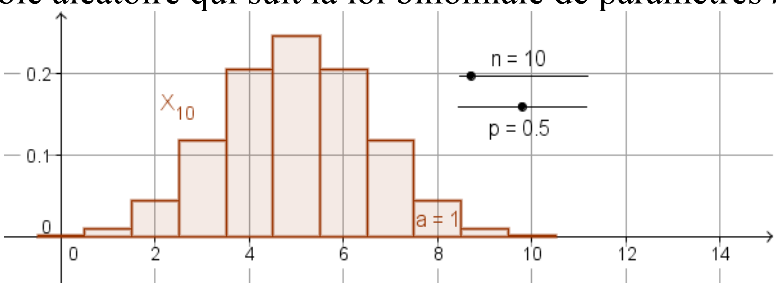
Propriétés : (1ère S)

Soit X est une variable aléatoire et a et b deux nombres réels donnés. Alors
(P$_1$) : $E(aX+b) = a\,E(X) + b$
(P$_2$) : $V(aX+b) = a^2\,V(X)$
(P$_3$) : $\sigma(aX+b) = a\,\sigma(X)$ (bien sûr si $a > 0$).

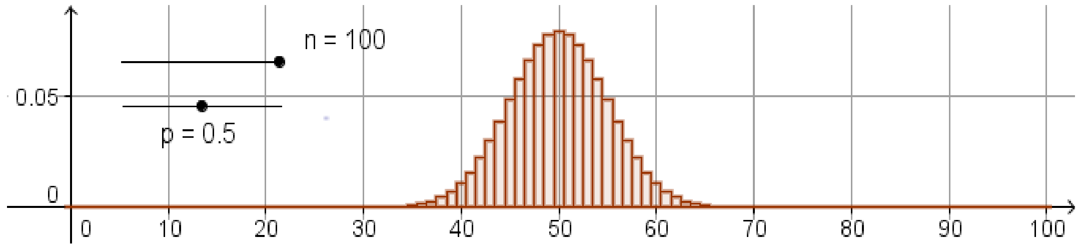
Si X est une variable aléatoire donnée, d'espérance $E(X) = m$. Alors la variable aléatoire définie par $Y = X-m$, a une espérance nulle $E(Y) = E(X) - m = 0$. On dit que Y est la *variable aléatoire **centrée** associée à X*. En effet, lorsqu'on soustrait la valeur moyenne à toutes les valeurs d'une série statistique, on obtient une moyenne égale à0.

D'autre part,
Si X est une variable aléatoire donnée, de variance $V(X) = \sigma^2$. Alors la variable aléatoire définie par $Z = X/\sigma$, a une variance $V(Z) = V(X)/\sigma^2 = 1$. On dit que Z est la *variable aléatoire **réduite** associée à X*. En effet, lorsqu'on divise toutes les valeurs par l'écart-type, on obtient un écart-type égal à 1.

Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.



Représentation graphique de X_{10} pour $n = 10$ et $p = 0,5$ donc $E(X_{10}) = 5$ et $\sigma = 1,581$..



Représentation graphique de X_{100} pour n = 100 et p = 0,5 donc $E(X_{100})$ = 50 et σ =5.

On définit une nouvelle variable aléatoire Z_n de la manière suivante :

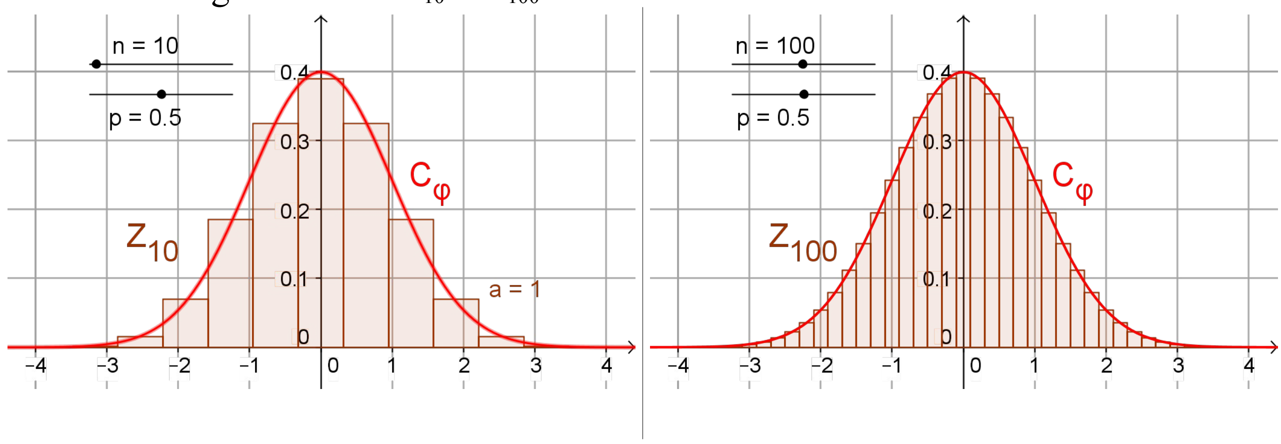
$$Z_n = \frac{X_n - m}{\sigma} = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Alors : Z_n est une <u>variable aléatoire ***centrée réduite***</u> : $E(Z_n) = 0$ et $\sigma(Z_n) = 1$.

Lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes et p fixé (ici p =0,5), le mathématicien français Abraham de Moivre a montré que les histogrammes représentant la loi de Z_n se rapprochent de la courbe d'une fonction φ (lire "phi") définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

Voici les histogrammes de Z_{10} et Z_{100}.



On peut dire alors que lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes (n tend vers $+\infty$) et p fixé, alors la variable aléatoire Z_n peut être approchée par une ***variable aléatoire continue*** ayant pour ***fonction densité la fonction*** **φ** définie ci-dessus.

<u>**Théorème (de) de Moivre-Laplace :(1ère version)**</u>

Soit n un entier naturel non nul, p un nombre réel compris entre 0 et 1. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: X_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. On appelle $Z_n = \frac{X_n - m}{\sigma} = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ la variable aléatoire centrée réduite associée à X_n . Alors, pour tous nombres réels a et b tels que $a < b$, on a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}$$

<u>**Théorème admis.**</u>

Si Z désigne la ***variable aléatoire continue*** ayant pour ***fonction densité la fonction*** φ définie ci-dessus, alors lorsque n prend des valeurs suffisamment grandes et p fixé, sous certaines conditions, la variable aléatoire ***Z_n peut être approchée par Z***. On dit que Z suit ***la loi normale centrée réduite***. Autrement dit :

Théorème (de) de Moivre-Laplace (2ème version)

Soit n un entier naturel non nul, p un nombre réel compris entre 0 et 1. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: X_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. On appelle $Z_n = \frac{X_n - m}{\sigma} = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ la *variable aléatoire centrée réduite associée* à X_n. Alors, si $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, pour tous nombres réels a et b tels que $a < b$, on a l'approximation :

$$\boxed{P(a \leqslant Z_n \leqslant b) \simeq P(a \leqslant Z \leqslant b)}$$

Théorème admis.

3.2) La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

***a*) Définition**.

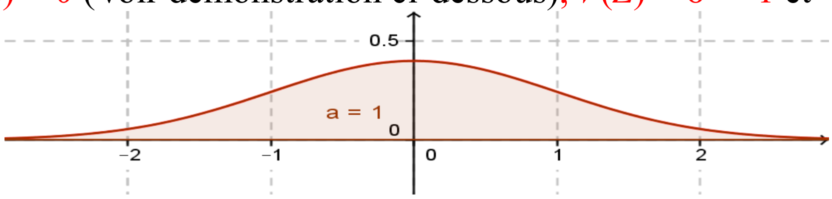
Une variable aléatoire Z suit ***la loi normale centrée réduite***, notée $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque Z admet pour fonction de densité de probabilité, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

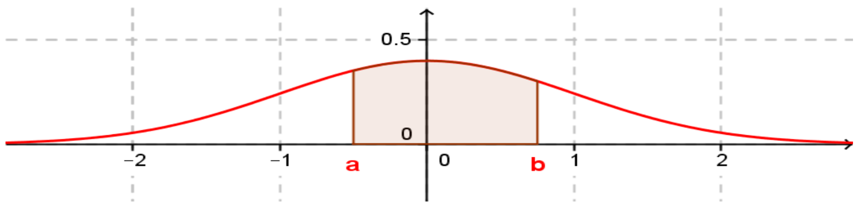
***b*) Premières propriétés**.

(P1) φ est une fonction *continue* et *positive* sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1$.

L'aire totale du domaine compris entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 1. Donc φ est bien une fonction de densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Et, par définition : **μ** $= E(Z) = 0$ (Voir démonstration ci-dessous), $V(Z) = \sigma^2 = 1$ et **σ** $= \sigma(Z) = 1$.

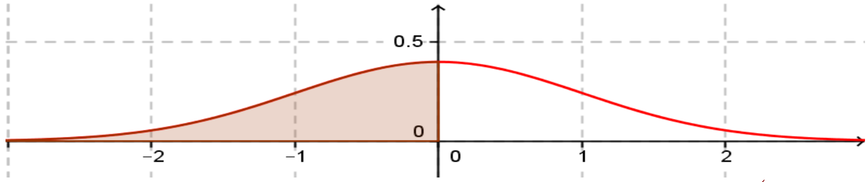


(P2) Pour tous nombres réels a et b, tels que $a \leqslant b$: $P(a \leqslant Z \leqslant b) = \int_a^b \varphi(x)\,dx$

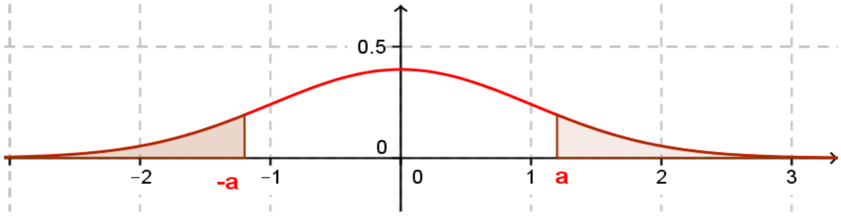


D'après les propriétés d'une fonction de densité de probabilités, on a: $P(X=a)=0$, donc : $P(a \leqslant Z \leqslant b) = P(a \leqslant Z < b) = P(a < Z \leqslant b) = P(a < Z < b)$

(P3) La fonction φ est paire donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Donc : $P(Z\leqslant 0)=P(Z\geqslant 0)=\frac{1}{2}$



(P4) Pour tout nombre réel a, on a aussi, par symétrie : $P(Z\leqslant -a)=P(Z\geqslant a)$



(P5) Valeurs de référence :

$$P(-1\leqslant Z\leqslant 1)=0{,}6826... \quad = 68{,}3\%$$
$$P(-2\leqslant Z\leqslant 2)=0{,}9545... \quad = 95{,}5\%$$
$$P(-3\leqslant Z\leqslant 3)=0{,}9973... \quad = 99{,}7\%$$

3.3) Calcul de l'espérance d'une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\varphi(t)\,dt$. La fonction g définie par : $g(t)=t\,\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t\,e^{-\frac{t^2}{2}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Donc, elle admet des primitives.

On pose $u(t)=-\frac{t^2}{2}$ donc $u'(t)=-t$. On transforme l'expression de g.

On a alors : $g(t)=t\,\varphi(t)=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\left(-t\,e^{-\frac{t^2}{2}}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\left(u'(t)e^{u(t)}\right)$.

Une primitive de la fonction g est la fonction G définie par : $G(t)=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}e^{u(t)}$.

Ce qui donne : $G(t)=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Maintenant, par définition de l'espérance d'une variable aléatoire sur $\mathbb{R}$, on a :

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\varphi(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ donc : $E(X)=\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 g(t)\,dt+\lim_{y\to+\infty}\int_0^y g(t)\,dt$.

On calcule d'abord les intégrales bornées avant de passer à la limite.

Or : $\int_x^0 g(t)\,dt=[G(t)]_x^0=G(0)-G(x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^0+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-1\right)$

Par suite : $\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 g(t)\,dt=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-1\right)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

De même, on démontre que $\int_0^y g(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-e^{-\frac{y^2}{2}}\right)$ et $\lim\limits_{y\to+\infty}\int_0^y g(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$E(X) = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 g(t)\,dt + \lim_{y\to+\infty}\int_0^y g(t)\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0 \quad . \qquad \text{CQFD.}$$

<u>2ème méthode</u> : La fonction g est impaire. Donc, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine O d'un repère orthonormal. Donc, pour tout $x > 0$: $g(-x) = -g(x)$. Par conséquent, l'aire géométrique A_1 du domaine délimité par la courbe et l'axe des abscisses sur $]-\infty\,;0]$ est égale à l'aire géométrique A_2 du domaine délimité par la courbe et l'axe des abscisses sur $[0\,;+\infty[$. Comme g est impaire, pour tout $x > 0$, on a : $g(-x) = -g(x)$. Donc, son intégrale sur $]-\infty\,;0]$ est ***négative*** et égale à $-A_1$ et son intégrale sur $[0\,;+\infty[$ est ***positive*** et égale à A_2. Par conséquent :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\,dt = -A_1 + A_2 = 0 \quad . \qquad \text{CQFD.}$$

<u>Remarque</u> :

On ***admet*** que la variance de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, définie par $E\left([X-E(X)]^2\right)$ est égale à 1. Il s'ensuit immédiatement que l'écart-type de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est aussi égal à 1.

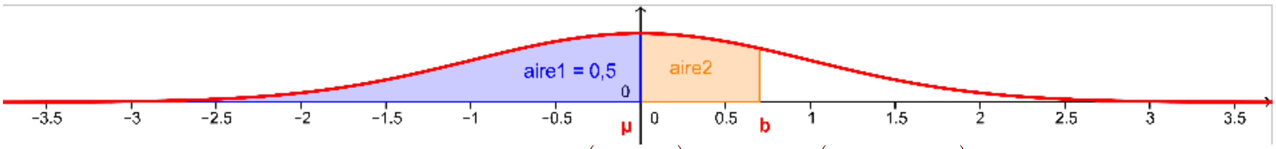
3.4) Utilisation de la calculatrice

Calcul des probabilités à la calculatrice : Lois normales $\mathcal{N}(0;1)$ ou $\mathcal{N}(\mu\,,\sigma^2)$:

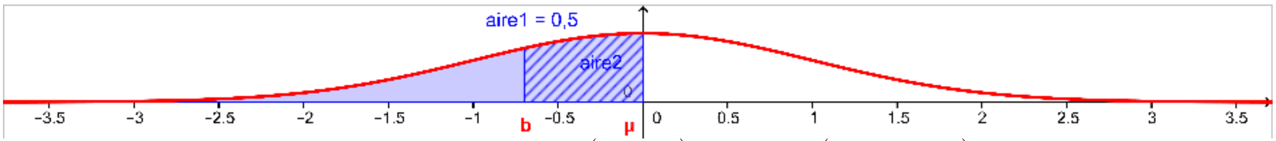
Casio : Graph 35+ et modèles sup.	***Texas : TI82 Stats et modèles sup.***
<u>Calcul des probabilités</u> ***P(– 0,5< Z< 1,2)*** Menu▶ **STAT**▶**DIST**▶ **NORM**▶ **NCD** ***Pour calculer P (– 0,5 < Z< 1,2)*** **DC normale** (ou normal C.D) **Data : Variable** **Lower : -0.5** **Upper : 1.2** **σ : 1** **μ : 0** **Save Res :None** **Execute** **CALC** Pour calculer, appuyer sur **F1** Après exécution on obtient : **DC normale** **P= 0.57639274** **z:Low=-0.5** **z:Up = 1.2**	**<u>Calcul des probabilités</u>** ***P(– 0,5< Z< 1,2)*** Menu▶ **2nd DISTR** (ou ▶ **Distrib**)  ***Pour calculer P (– 0,5< Z<1,2)*** <u>Menu ▶ **2nd DISTR** ▶ **normalcdf** ou</u> <u>▶ **normalFrép**</u> (version fr) Compléter les paramètres : ***a, b , μ , σ*** **normalcdf(-0.5,1.2,0,1)** Après exécution on obtient : **0.5763927362**

<u>Remarques</u> :

Certaines calculatrices ne fournissent pas $P(X<b)=P(X\leqslant b)$ mais seulement $P(a\leqslant X\leqslant b)$. Pour le calcul de $P(X<b)=P(X\leqslant b)$ dans le cas où X suit une loi N(μ,σ²), la méthode rigoureuse pratiquée est donc la suivante (*Faire une figure !*) : ***très important !!***

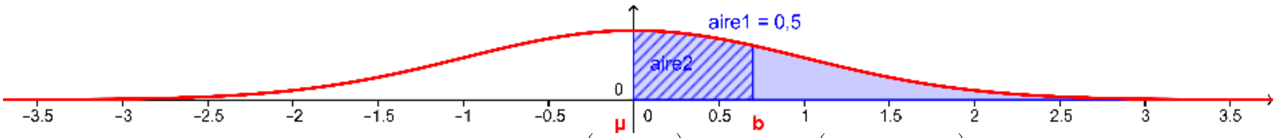


Si $b > \mu$, on utilise : $P(X<b)=0{,}5+P(\mu\leqslant X\leqslant b)$;

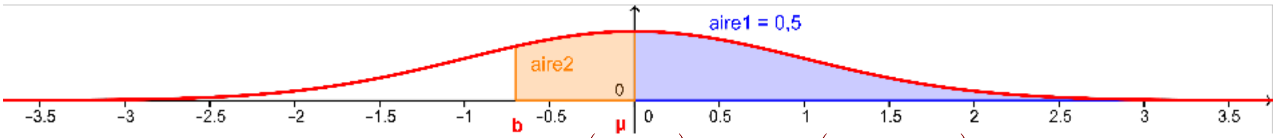


Si $b < \mu$, on utilise : $P(X<b)=0{,}5-P(b\leqslant X\leqslant\mu)$.

Avec une méthode analogue, on peut calculer $P(X>b)=P(X\geqslant b)$:



Si $b > \mu$, on utilise : $P(X>b)=0{,}5-P(\mu\leqslant X\leqslant b)$;



Si $b < \mu$, on utilise : $P(X>b)=0{,}5+P(b\leqslant X\leqslant\mu)$.

Cependant, comme la fonction $\exp(-x^2)$ tend vers 0 <u>*très rapidement*</u> lorque x tend vers l'infini, on peut calculer $P(X<b)=P(X\leqslant b)$ en écrivant sur une calculatrice les valeurs : $a = -10^{99}$ et b. Ce qui donne : $\boxed{P(X<b)=P(-10^{99}<X<b)}$.
De même, : $\boxed{P(X>a)=P(a<X<10^{99})}$.

3.5) Comment Déterminer un intervalle associé à une probabilité donnée

C'est le problème inverse. Soit $\alpha\in]0;1[$. Le problème consiste à déterminer s'il existe un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que (la probabilité du succès) $P(X\in I)=1-\alpha$?

(On dit aussi au risque d'erreur de α).

Il y a une infinité de réponses du type :

$I_1=[a;b]$, intervalle non symétrique par rapport à 0 ;

$I_2=[-a;+a]$, symétrique par rapport à 0. On dit « *intervalle* ***bilatéral*** » ;

$I_3=]-\infty;b]$, borné à droite. On dit « *intervalle* ***unilatéral*** *à gauche* » ;

ou encore $I_4=[a;+\infty[$, borné à gauche. On dit « *intervalle* ***unilatéral*** *à droite* ».

<u>Exemples</u> : 1°) Déterminer un nombre réel a tel que $P(X\leqslant b)=0{,}95$.
2°) Déterminer un nombre réel a tel que $P(X\geqslant a)=0{,}95$.
3°) Déterminer un nombre réel a tel que $P(-a\leqslant X\leqslant a)=0{,}95$.

1°) On cherche ici un intervalle <u>***unilatéral***</u> *à gauche* avec α=0,05 (risque d'erreur = 5%).

C'est le calcul inverse.

1°) Pour déterminer un nombre *b* tel que : $P(X \leqslant b) = 0{,}95$, on utilise les instructions inverses sur la calculatrice.

<table>
<tr><th>Casio : Graph 35+ et modèles sup.</th><th>Texas : TI82 Stats et modèles sup.</th></tr>
<tr><td>Menu▶STAT▶DIST▶ NORM▶ F3 invN
Pour calculer <i>a</i> tel que <i>P(X<a</i>) = 0,95
Normal inverse
Data : Variable
Tail : Left
Area : 0,95
σ : 1
μ : 0
Save Res :None
Execute
CALC Pour calculer, appuyer sur F1
Après exécution on obtient :
Normal inverse
xInv=1,644853626</td><td>Menu▶ 2nd DISTR (ou ▶ Distrib)

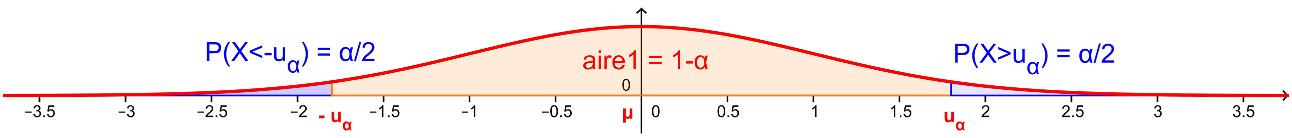

Pour calculer <i>a</i> tel que : <i>P(X<a</i>) = 0,95
Menu ▶ 2nd DISTR ▶ invNorm ou ▶ FracNormale (version fr)
Compléter les paramètres : <i>p</i>, μ , σ
FracNormale(0.95,0,1)
Après exécution on obtient :
1,644853626</td></tr>
</table>

Conclusion : Une valeur approchée de *b* telle que $P(X \leqslant b) = 0{,}95$ est b ≈ 1,64 arrondi au centième près. Donc *I* =] – ∞ ; *b*] est du type unilatéral gauche.

2°) On cherche ici un intervalle ***unilatéral à droite*** avec α = 0,05 (risque d'erreur = 5%). Pour déterminer un nombre *a* tel que : $P(X \geqslant a) = 0{,}95$, on passe par l'événement contraire, donc il suffit de déterminer *a* tel que : $P(X < a) = 0{,}05$ et utiliser les instructions inverses sur la calculatrice.

- sur **Casio**, il suffit de remplacer "**Left**" par "**Right**". On obtient directement *a* = xInv=**-1,644853626** . Ce qui était prévisible !
- Sur **TI** : **FracNormale(0.05,0,1)** ou **invNorm(0.05,0,1).** Même résultat !

3°) On cherche ici un intervalle ***bilatéral*** avec **α = 0,05** (risque d'erreur = 5%). Pour déterminer un nombre noté u_α tel que : $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 0{,}95$, on fait un dessin :



Comme l'intervalle est bilatéral, donc symétrique, il suffit de chercher une valeur *a* telle que $P(X < a) = 0{,}975$ = 97,5%. A la calculatrice, on obtient : $a = u_\alpha$ = **1,9599963986...**

Conclusion : $P(-u_{0{,}05} \leqslant X \leqslant u_{0{,}05}) = 0{,}95$ équivaut à dire $u_\alpha \approx 1{,}96$.

Théorème (ROC)

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ alors, pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que :

$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Démonstration du théorème :

La fonction de densité de probabilité de la loi normale centrée réduite, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Soit H la primitive de φ de sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On sait que la fonction H est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$$H(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt \quad .$$

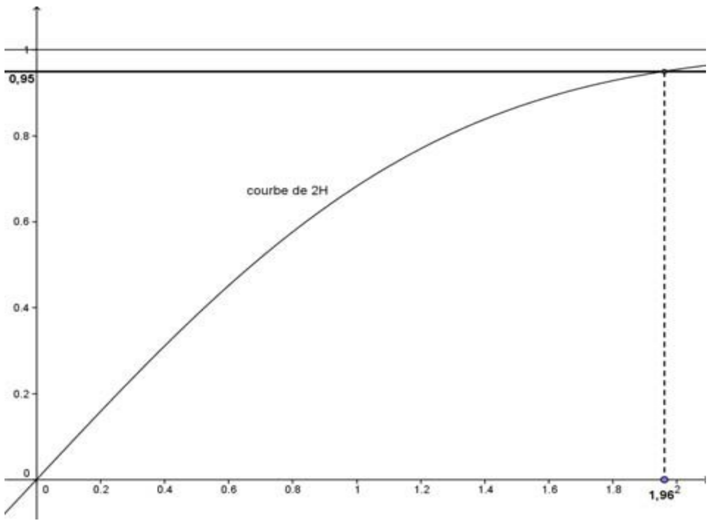
Par définition, H est une fonction continue et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
Et d'après la symétrie de la courbe, on a pour tout réel u positif,

$$P(-u \leqslant X \leqslant u) = 2P(0 \leqslant X \leqslant u) = 2\int_0^u \varphi(t)\,dt = 2H(u)$$

De plus,
$$\lim_{u \to +\infty} H(u) = \frac{1}{2}$$

puisque cela correspond à l'aire sous la courbe pour $u \in [0;+\infty[$, c'est-à-dire à $P(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}$. La fonction $2H$ admet donc le tableau de variations et la courbe représentative ci-dessous :

u	0	$+\infty$
$2H'(u)$	$+$	
$2H(u)$	$0 \nearrow$	1



Pour tout réel α compris strictement entre 0 et 1, le réel $(1-\alpha)$ est également compris strictement entre 0 et 1 et donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel u_α strictement positif tel que $2H(u_\alpha) = 1-\alpha$; c'est-à-dire tel que :

$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha \qquad \text{CQFD.}$$

On vient de trouver ci-dessus, une première valeur approchée correspandant à $\alpha = 0{,}05$ (= 5%) : $u_{0,05} \approx 1{,}96$. Pour $\alpha = 0{,}01$ (= 1%) on obtient : $u_{0,01} \approx 2{,}58$.

A connaître !! $\boxed{P(-u_{0,05} \leqslant X \leqslant u_{0,05}) = 0{,}95}$

$$\boxed{P(-u_{0,01} \leqslant X \leqslant u_{0,01}) = 0{,}99}$$

IV. Loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

4.1) Définition

Une variable aléatoire X suit une ***loi normale*** $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ si la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

4.2) Espérance et écart-type

Si une v.a. X suit une ***loi normale*** $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, alors $E(X)=\mu$, $V(X)=\sigma^2$ et $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Attention !

Lorsqu'on écrit "X suit la loi $\mathcal{N}(40;5)$", cela signifie que la valeur moyenne de X est bien $E(X) = 40$, alors que 5 désigne la variance de X, donc l'écart-type est $\sigma = \sqrt{5}$.
Attention, dans certains (anciens) ouvrages, on note $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ au lieu de $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

Exemple (Extrait des documents ressources) :

La masse en kg des nouveaux nés à la naissance est une variable aléatoire qui peut être modélisée par une loi normale de moyenne $\mu = 3{,}3$ *et d'écart-type* $\sigma = 0{,}5$. *Calculer la probabilité qu'un nouveau né pèse moins de* 2,5 kg *à la naissance.*

La probabilité qu'un nouveau né pèse moins de 2,5 kg à la naissance est donc : $P(X < 2{,}5)$.

La variable $Z = \dfrac{X-3{,}3}{0{,}5}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

On a alors : $P(X < 2{,}5) = P(X-3{,}3 < 2{,}5-3{,}3) = P\left(\dfrac{X-3{,}3}{0{,}5} < \dfrac{2{,}5-3{,}3}{0{,}5}\right)$

Ce qui donne : $P(X < 2{,}5) = P(Z < -1{,}6) = 1 - P(Z < 1{,}6) \approx 0{,}055$.

La probabilité cherchée est donc égale à 0,055 à 10^{-3} près.

On peut aussi obtenir directement la valeur de P(X < 2,5) à la calculatrice.

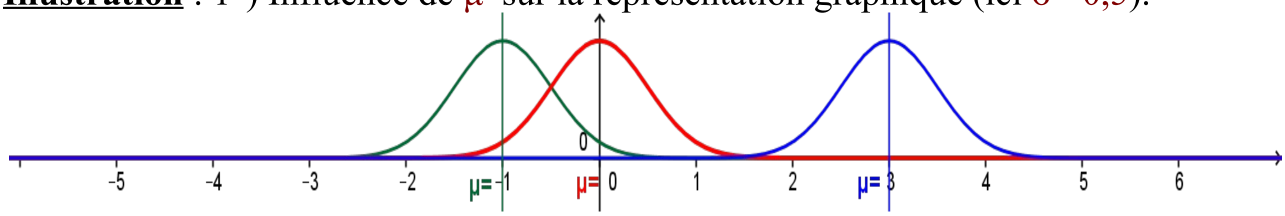
4.3) Courbe de la fonction de densité de probabilité

Soit X une v.a.continue qui suit une ***loi normale*** $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, alors :

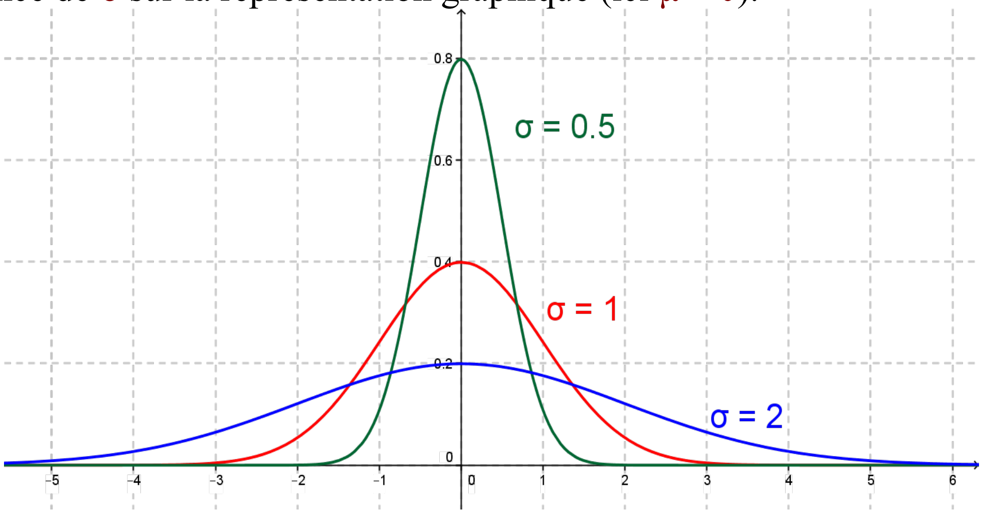
1°) La courbe représentative C_f de sa fonction f de densité de probabilité admet la doite d'équation "$x = \mu$" pour axe de symétrie ;

2°) La courbe représentative C_f est "pointue" si $0 < \sigma < 1$ et C_f est "étalée" si $\sigma > 1$.

Illustration : 1°) Influence de μ sur la représentation graphique (ici $\sigma = 0{,}5$).



2°) Influence de σ sur la représentation graphique (ici $\mu = 0$).

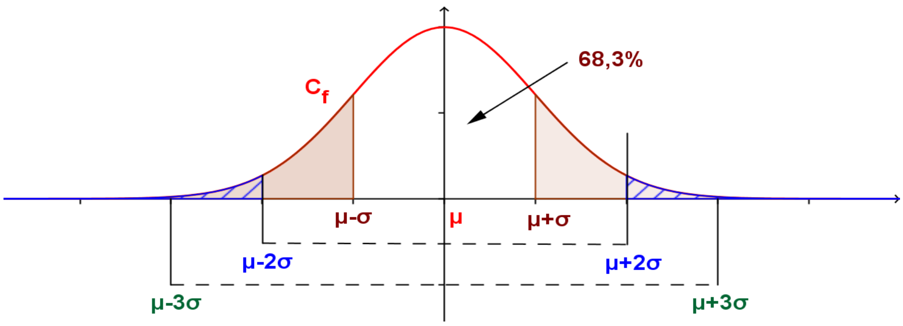


4.4) Les intervalles « Un, deux, trois sigmas »

Les résultats suivants sont utilisés dans de nombreuses situations.

$$P(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma)=0{,}683 \;= \mathbf{68{,}3\%}$$
$$P(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma)=0{,}955 \;= \mathbf{95{,}5\%}$$
$$P(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma)=0{,}997 \;= \mathbf{99{,}7\%}$$

<u>Illustration</u> :



Pour aller plus loin

4.5) Comment construire la courbe de la fonction densité d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$?

On sait que "presque-la-totalité" de la courbe (99,7%) est comprise entre $\mu - 3\sigma$ et $\mu + 3\sigma$. Le reste de la courbe (de part et d'autre) est négligeable ou presque nul. Il suffit alors de placer μ, $\mu - 3\sigma$ et $\mu + 3\sigma$, puis $f(0)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ (Hors programme).

Pour $\sigma = 1$, on obtient : $f(0)=0{,}39894\ldots\simeq 0{,}4$.

Enfin construire une belle "courbe en cloche" qui passe par $(0\,;f(0))$ et qui est presque-nulle à l'extérieur de l'intervalle $[\mu-3\sigma\,;\,\mu+3\sigma]$.

Comme ci-dessus. A vous de jouer !