Géométrie dans l'espace

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
1ère partie ✓ **Droites et plans** Positions relatives de droites et de plans : intersection et parallélisme. Orthogonalité : - de deux droites ; - d'une droite et d'un plan.	• Étudier les positions relatives de droites et de plans. • Établir l'orthogonalité d'une droite et d'un plan.	Le cube est une figure de référence pour la représentation des positions relatives de droites et de plans. On étudie quelques exemples de sections planes du cube. Ce travail est facilité par l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique.
1ère partie ✓ **Géométrie vectorielle** Caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires. *1ère partie* ✓ **Vecteurs coplanaires.** Décomposition d'un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires. Repérage. Représentation paramétrique d'une droite.	• Choisir une décomposition pertinente dans le cadre de la résolution de problèmes d'alignement ou de coplanarité. • Utiliser les coordonnées pour : - traduire la colinéarité ; - caractériser l'alignement ; - déterminer une décomposition de vecteurs.	*On étend à l'espace la notion de vecteur et* les opérations associées. On fait observer que des plans dirigés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles. Il est intéressant de présenter la démonstration du théorème dit « du toit ». On fait percevoir les notions de liberté et de dépendance. On ne se limite pas à des repères orthogonaux. La caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires conduit à une représentation paramétrique de ce plan. [SI] Cinématique et statique d'un système en mécanique.
2ème partie **Produit scalaire** Produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace : définition, propriétés. Vecteur normal à un plan. Équation cartésienne d'un plan.	• Déterminer si un vecteur est normal à un plan. Caractériser les points d'un plan de l'espace par une relation $ax+by+cz+d=0$ avec a , b , c trois nombres réels non tous nuls. • Déterminer une équation cartésienne d'un plan connaissant un point et un vecteur normal. • Déterminer un vecteur normal à un plan défini par une équation cartésienne. Démontrer qu'une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. • Choisir la forme la plus adaptée entre équation cartésienne et représentation paramétrique pour : - déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan ; - étudier la position relative de deux plans	On étend aux vecteurs de l'espace la définition du produit scalaire donnée dans le plan. On caractérise vectoriellement l'orthogonalité de deux droites et on introduit la notion de plans perpendiculaires.

I. Droites et plans

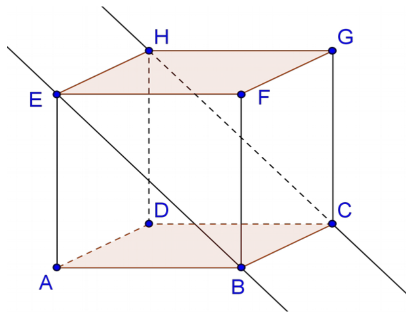
1.1) Positions relatives de droites dans l'espace

On distingue deux cas :

- Si deux droites sont <u>*contenues dans un même plan*</u>, on dit qu'elles sont ***coplanaires***. Elles peuvent donc être *sécantes*, *parallèles* ou *confondues*.
- Si deux droites ne sont pas contenues dans un même plan, on dit qu'elles sont ***non coplanaires***.

Exemples

ABCDEFGH est un cube.
- Les droites (*AC*) et (*BE*) ne sont pas coplanaires.
- Les droites (*BE*) et (*HC*) sont parallèles.
- Les doites (*AG*) et (*EC*) sont sécantes.
- Les doites (*BF*) et (*HC*) ne sont pas coplanaires.
- Les droites (*AH*) et (*BG*) sont parallèles.
- Les doites (*EG*) et (*BG*) sont sécantes.

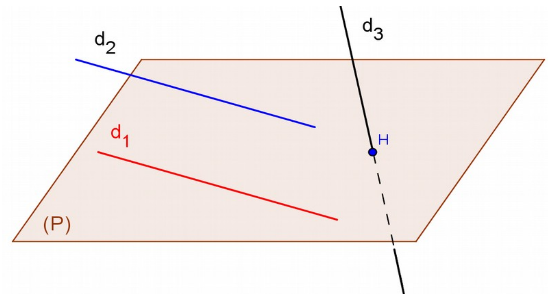


1.2) Positions relatives d'une droite et d'un plan dans l'espace

Rappel : Une droite *d* est *<u>parallèle</u>* à un plan *P* si elle est parallèle à une droite *d'* contenue dans le plan *P*.

Soit *d* une droite et *P* un plan dans l'espace. On distingue trois cas :

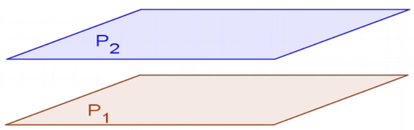
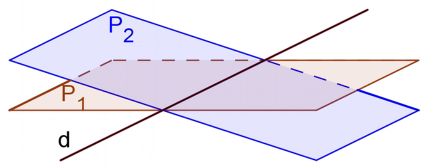
– *La droite* d_1 est [entièrement] *contenue dans le plan P*, donc *tout point de* d_1 *appartient aussi au plan P;*
– *La droite* d_2 est *strictement parallèle au plan P*, donc d_2 *et P n'ont aucun point commun ;*
– *La droite* d_3 et le plan *P* *sont sécants*, donc d_3 *et P ont un seul point commun.*



$d_1 \subset P$ et $d_1 // d_2$ donc $d_2 // P$

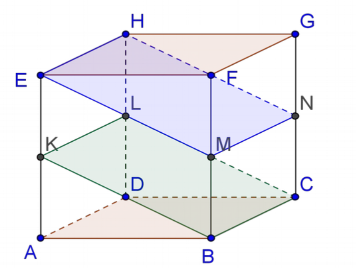
1.3) Positions relatives de deux plans dans l'espace

Trois points <u>non alignés</u> *A, B* et *C* de l'espace définissent un plan et un seul, noté (*ABC*). Soit P_1 et P_2 deux plans dans l'espace. On distingue trois cas :

 P_1 et P_2 sont *strictement parallèles*, donc P_1 et P_2 *n'ont aucun point commun.* $P_1 // P_2$ et $P_1 \cap P_2 = \emptyset$	 P_1 et P_2 sont *confondus* Donc $P_1 = P_2$. Donc, on a aussi $P_1 // P_2$. et $P_1 \cap P_2 = P_1 = P_2$	 P_1 et P_2 sont *sécants* et leur intersection est une droite d. Donc $P_1 \cap P_2 = d$

Exemples

ABCDEFGH est un cube. *K, L, M* et *N* sont les milieux respectifs des arêtes [*AE*], [*DH*], [*BF*] et [*CG*],
- La droite (*AC*) est sécante au plan (*BKC*).
- La droite (*BK*) est sécante au plan (*ADC*).
- Les plans (*BKC*) et (*EMN*) sont parallèles.
- Les plans (*BKC*) et (*CDG*) sont sécants.



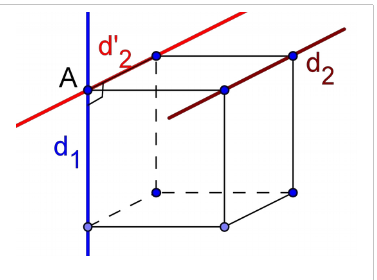
II. Orthogonalité dans l'espace

2.1) Orthogonalité de deux droites dans l'espace

Rappel : Deux droites sont ***perpendiculaires*** si et seulement si elles sont ***sécantes*** (donc coplanaires) et ***forment un angle droit***.

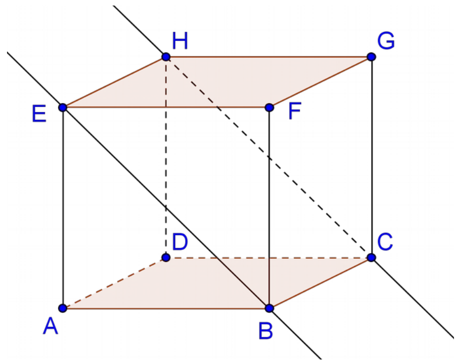
Définition :

Soient d_1 et d_2 deux droites dans l'espace et $A \in d_1$. On dit que d_1 est ***orthogonale*** à d_2 si d_1 est *perpendiculaire* à une droite d'_2 parallèle à d_2 et passant par A.
Autrement dit :
Deux droites d_1 et d_2 sont ***orthogonales*** si leurs parallèles passant par un point donné sont perpendiculaires.



Exemples

$ABCDEFGH$ est un cube.
- Les droites (AC) et (BF) sont orthogonales ;
  car (AC) perpendiculaire à (CG) et $(BF)//(CG)$.
- Les droites (AD) et (BE) sont orthogonales ;
  car $(AD)//(BC)$ et (BC) est perpendiculaire à (BE).
- Les droites (AG) et (CE) ne sont pas orthogonales ;
  car elles sont contenues dans le plan (ACE) et sont les diagonale du rectangle $ACGE$ qui n'est pas un carré.



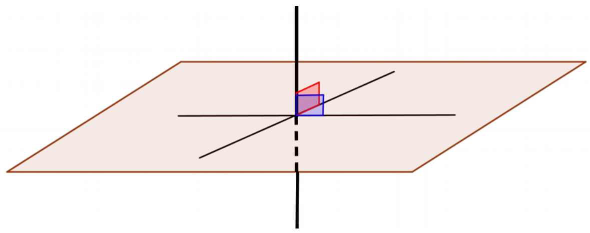
Propriété :

(P$_1$) Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

Cette propriété est naturellement fausse si on remplace « *orthogonale* » par « *perpendiculaire* ».

2.2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan dans l'espace

Rappel :
Une droite est ***perpendiculaire*** à un plan si et seulement si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes contenues dans ce plan.



Définition :

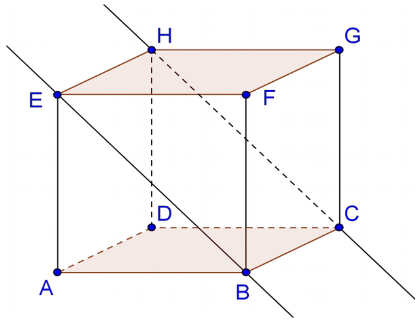
Une droite est ***orthogonale*** à un plan si et seulement si elle est ***orthogonale*** à deux droites *sécantes* contenues dans ce plan.

Propriété :

(P$_2$) Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à toute droite contenue dans ce plan.

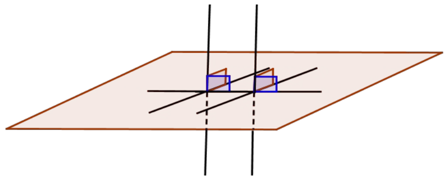
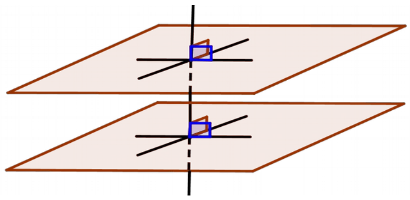
Exemples

ABCDEFGH est un cube.
- La droite (*AB*) est orthogonale à la doite (*FC*).
  En effet, la droite (AB) est perpendiculaire aux deux droites (*BF*) et (*BC*) contenues dans le plan (*BFC*). Donc, la droite (*AB*) est orthogonale au plan (*BFC*). Par conséquent, la droite (*AB*) est orthogonale à toute droite contenue dans le plan (*BFC*). En particulier, la droite (*AB*) est orthogonale à la doite (*FC*).



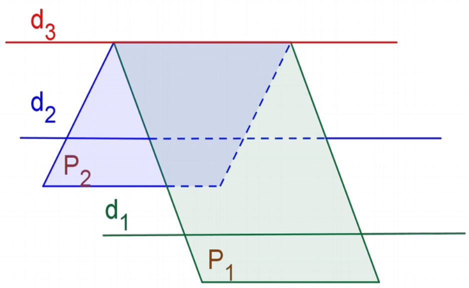
2.3) Propriétés

On peut reprendre toutes les propriétés vues au collège sur les droites et analyser toutes les "combinaisons", entre droites, entre plans et entre droites et plans dans l'espace.

Propriétés	**Illustrations**
(P_3) Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.	
(P_4) Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.	
(P_5) Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.	
(P_6) Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.	

Le théorème du toit **(ROC).**

(P_7) Soit P_1 et P_2 deux plans sécants contenant deux droites parallèles d_1 et d_2 respectivement. Alors l'intersection de P_1 et P_2 est une droite d_3 parallèle à d_1 et d_2.



Démonstration.

Par hypothèse, les plans P_1 et P_2 sont sécants, donc leur intersection est une droite d_3 ; et les droites d_1 et d_2 sont parallèles. Donc : $P_1 \cap P_2 = d_3$ et $d_1 // d_2$

Les droites d_1 et d_2 sont parallèles donc elles sont coplanaires. Donc, il existe un plan P_3 qui contient à la fois d_1 et d_2. Mais alors d_1 et d_3 sont contenues dans P_1 ; et d_2 et d_3 sont contenues dans P_2 . Donc :

$$P_1 \cap P_3 = d_1 \quad \text{et} \quad P_2 \cap P_3 = d_2$$

Montrons que $d_1 // d_3$.

Supposons que d_1 et d_3 ne soient pas parallèles. Donc elles sont sécantes en un point A.

Comme $A \in d_1 \cap d_3$ donc $A \in d_1$ et $A \in d_3$.

- $A \in d_1$ et $d_1 = P_1 \cap P_3$ donc $A \in P_3$.
- et $A \in d_3$ et $d_3 = P_1 \cap P_2$ donc $A \in P_2$. Ce qui donne, $A \in P_2 \cap P_3$.

Par conséquent : $A \in d_2$. Et comme $A \in d_1$, on en déduit que d_1 et d_2 sont sécantes en A.

Ce qui est absurde, contraire à notre hypothèse. Par conséquent les droites d_1 et d_3 sont parallèles.

Et comme d_1 et d_2 sont parallèles, on en déduit que les droites d_2 et d_3 sont aussi parallèles.

Conclusion : *L'intersection de P_1 et P_2 est une droite d_3 parallèle à la fois à d_1 et d_2.* CQFD

III. Vecteurs dans l'espace

3.1) Rappels

La notion de vecteur étudiée dans le plan en 1ère S peut naturellement être étendue à l'espace. Un vecteur est défini par la donnée d'***une direction***, ***un sens*** et ***une longueur*** (qu'on appelle la ***norme*** du vecteur). On peut définir de la même manière qu'en 1ère S, la ***somme de deux vecteurs*** et le ***produit d'un vecteur par un réel***.

Dans ce cadre, on dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** s'ils ont la même direction. Autrement dit, ***s'il existe un réel k tel que*** $\vec{v}=k\vec{u}$ ou, ce qui revient au même, ***s'il existe un réel k' tel que*** $\vec{u}=k'\vec{v}$ **.**

Caractérisation d'une droite : si A est un point du plan et $\vec{u}$ un ***vecteur non nul***, alors l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$ définit ***la droite d passant par A et de direction le vecteur*** $\vec{u}$. Autrement dit :

$M\in d$ si et seulement si [*il existe un réel k* tel que : $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$]

On dit alors que *la droite d passe par le point A et* ***est dirigée par*** $\vec{u}$; ou encore que $\vec{u}$ est un ***vecteur directeur*** de la droite d et on écrit : $d=(A,\ \vec{u}\ )$.

Nous avons également vu, en 1ère S, que si O est un point du plan et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux ***vecteurs non colinéaires*** du plan, alors le triplet $(O,\vec{i},\vec{j})$ définit un ***repère du plan*** (OIJ), où O, I et J sont les points non alignés tels que $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$.

Caractérisation d'un plan : Soit M un point quelconque. M appartient au plan (OIJ) si et seulement si, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'exprime comme « ***combinaison linéaire*** » des ***deux vecteurs de base*** $\vec{i}$ et $\vec{j}$; c'est-à-dire :

$M\in(OIJ)$ si et seulement si [*il existe deux réels x et y* tels que : $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$]

3.2) Vecteurs coplanaires

Définition

On dit que trois vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont ***coplanaires*** s'ils sont situés dans un même plan (vectoriel), autrement dit si chacun de ces vecteurs peut s'exprimer comme combinaison linéaire des deux autres, c'est-à-dire, en particulier :

Il existe deux réels α *et* β tels que : $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$

On peut aussi écrire deux autres expressions : $\vec{v}=\alpha_1\vec{u}+\beta_1\vec{w}$ et $\vec{u}=\alpha_2\vec{v}+\beta_2\vec{w}$

Propriété :

(P_8) Trois vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont ***coplanaires*** si et seulement si, *il existe trois réels* α,β *et* γ *non tous nuls* tels que : $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$ (*)

C'est une conséquence immédiate de la définition.
On dit alors que les trois vecteurs ***sont liés*** par ***une relation de dépendance*** (*).

Définition

On dit que quatre points A, B, C et D sont ***coplanaires*** s'ils sont situés dans un même plan, autrement dit si les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Conséquences

(P_9) Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
(P_{10}) Une droite *d* est parallèle à un plan *P* si et seulement si, un vecteur directeur de *d* est un vecteur du plan *P*.
(P_{11}) Deux plans *P* et *P'* sont parallèles si et seulement si *P* et *P'* sont dirigés par un même couple de vecteurs non colinéaires.

Définition

Si $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont ***trois vecteurs non coplanaires*** de l'espace, alors tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace s'écrit d'*une manière unique* *comme combinaison linéaire des* ***trois vecteurs de base*** $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$, c'est-à-dire :

il existe trois réels x, y et z tels que : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

On note $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ***les coordonnées du vecteur*** $\vec{u}$ ***dans la base*** $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $k \in \mathbb{R}$, alors : $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$ et $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$.

Exemple : Les trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

On sait que :
$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires (ssi) Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$
Cherchons s'il existe un tel couple de nombres réels. Si oui, les trois vecteurs sont coplanaires. Sinon, ils ne le sont pas. On a alors :

$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} \text{ (ssi) } \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (ssi) } \begin{cases} \alpha-\beta=-1 \\ \beta=2 \\ -\alpha+\beta=1 \end{cases} \text{ (ssi) } \begin{cases} \alpha-2=-1 \\ \beta=2 \\ -\alpha+\beta=1 \end{cases}$$

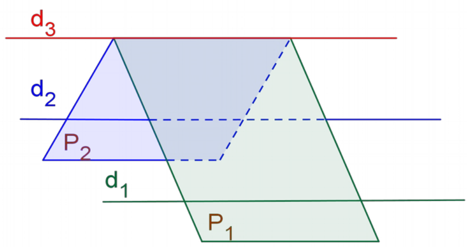
$$\text{(ssi) } \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=2 \end{cases}$$

Par suite : On a bien $\vec{w}=\vec{u}+2\vec{v}$ (*). On peut le vérifier coordonnée par coordonnée.
On dit aussi que les trois vecteurs sont liés par la relation de dependance (*) qui peut aussi s'écrire : $\vec{u}+2\vec{v}-\vec{w}=\vec{0}$.
Conclusion : Les trois vecteurs sont bien coplanaires.

Exemple 2 : **2ème démonstration du théorème du toit. (ROC).**

Théorème du toit

Soit P_1 et P_2 deux plans sécants contenant deux droites parallèles d_1 et d_2 respectivement. Alors l'intersection de P_1 et P_2 est une droite d_3 parallèle à d_1 et d_2.



Démonstration vectorielle

Par hypothèse, les deux plans P_1 et P_2 sont sécants, donc leur intersection est une droite d_3.
Les droites d_1 et d_2 sont parallèles, donc elles ont la même direction.

Soit $\vec{w}$ un vecteur directeur des deux droites d_1 et d_2. Soit A un point de d_3. Donc :

- pour tout point M du plan P_1, il existe deux réels x et y tels que : $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{w}$ où $\vec{u}$ est un vecteur de P_1 non colinéaire avec $\vec{w}$.
- pour tout point M du plan P_2, il existe deux réels x' et y' tels que : $\overrightarrow{AM}=x'\vec{v}+y'\vec{w}$ où $\vec{v}$ est un vecteur de P_2 non colinéaire avec $\vec{w}$.

Par conséquent, dire qu'un point M appartient à d3, revient à dire qu'il existe des réels x, x', y et y' tels que : $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{w}=x'\vec{v}+y'\vec{w}$

Si $x\neq 0$, on peut réécrire l'égalité précédente sous la forme : $\vec{u}=\frac{x'}{x}\vec{v}+\frac{y'-y}{x}\vec{w}$,

on en déduit que le vecteur $\vec{u}$ appartient au plan P_2. Par suite, P_1 et P_2 sont alors dirigés par un même couple de vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{w}$. Donc P_1 et P_2 sont parallèles.

Ce qui est contraire à notre hypothèse que P_1 et P_2 sont sécants (absurde).

Nous venons de démontrer que [Si $x\neq 0$, alors P_1 et P_2 sont parallèles].

Par contraposée, nous pouvons affirmer que $x = 0$. Par suite $\overrightarrow{AM}=y\vec{w}$. Ce qui prouve que $M\in d_3$. Donc d_3 est aussi dirigée par le vecteur $\vec{w}$. Par suite d_1 // d_2 // d_3.

Conclusion : *L'intersection de P_1 et P_2 est une droite d_3 parallèle à la fois à d_1 et d_2.* CQFD

3.3) Repérage d'un point dans l'espace

Définition

Soit O un point quelconque de l'espace et $\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$ ***trois vecteurs non coplanaires*** de l'espace, alors le quadruplet $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ définit un ***repère de l'espace***.
Si M est un point quelconque de l'espace. Alors le vecteur $\overrightarrow{OM}$ peut être exprimé comme ***combinaison linéaire*** des ***trois vecteurs de base*** $\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$; c'est-à-dire :
[*il existe trois réels x, y et z* tels que : $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$]

On dit que $(x ; y ; z)$ sont ***les coordonnées du point M dans le repère*** $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Définition

L'espace est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ deux points de l'espace, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$

et le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\dfrac{y_A+y_B}{2}\,;\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.

3.4) Norme et distance

Définition

L'espace est muni d'un ***repère orthonormé*** $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$ deux points et $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace. Alors :

- La ***norme*** (la longueur) du vecteur $\vec{u}$ est donnée par : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- La ***distance*** entre les deux points A et B est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire :

$$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}\ .$$

3.5) Représentations paramétriques

a) Représentations paramétriques d'une droite

Théorème et définition.

L'espace est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point quelconque de l'espace, $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ un point donné et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace.

Alors : ***M(x ; y ; z) appartient à la droite D*** passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si, ***il existe un réel t*** tel que :

$$\begin{cases}x=\alpha t+x_A\\ y=\beta t+y_A\\ z=\gamma t+z_A\end{cases}\ ,\quad t\in\mathbb{R}$$

Cette écriture s'appelle ***une représentation paramétrique*** de la droite D et $\boldsymbol{t}$ est le ***paramètre***.

Démonstration.

Soit D la droite passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\neq\vec{0}$.

Méthode standard : Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point quelconque de l'espace. Alors :

$M\in D$ (ssi) Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

(ssi) Il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$

(ssi) Il existe un réel t tel que $\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$

(ssi) Il existe un réel t tel que $\begin{cases}x-x_A=t\alpha\\ y-y_A=t\beta\\ z-z_A=t\gamma\end{cases}$

(ssi) Il existe un réel t tel que $\begin{cases} x=\alpha t+x_A \\ y=\beta t+y_A \\ z=\gamma t+z_A \end{cases}$ CQFD.

Exemple 1.

Soit $A(1;-2;3)$ un point donné et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace. Déterminer ***une représentation paramétrique*** de la droite D passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

En effet :

Soit $M(x ; y ; z)$ un point quelconque de l'espace. Alors :

$M\in D$ (ssi) Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

(ssi) Il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$

(ssi) Il existe un réel t tel que $\begin{pmatrix}x-1\\y+2\\z-3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$

(ssi) Il existe un réel t tel que $\begin{cases} x-1=3t \\ y+2=2t \\ z-3=-t \end{cases}$

Conclusion : représentation paramétrique de la droite D est : $\begin{cases} x=3t+1 \\ y=2t-2 \\ z=-t+3 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

b) Représentations paramétriques d'un plan

Théorème et définition.

L'espace est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit $M(x ; y ; z)$ un point quelconque de l'espace, $A(x_A ; y_A ; z_A)$ un point donné et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Alors : ***M(x;y;z) appartient au plan P*** passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si, ***il existe deux réels t et s*** tels que :

$$\begin{cases} x=\alpha s+\alpha' t+x_A \\ y=\beta s+\beta' t+y_A \\ z=\gamma s+\gamma' t+z_A \end{cases} ,\quad s,t\in\mathbb{R}$$

Cette écriture s'appelle ***une représentation paramétrique*** du plan P et ***s*** et ***t*** sont les ***paramètres***.

Démonstration.

Soit P le plan passant par $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$.

Méthode standard : Soit $M(x ; y ; z)$ un point quelconque de l'espace. Alors :

$M\in P$ (ssi) Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

(ssi) Il existe deux réels s et t tels que : $\overrightarrow{AM}=s\vec{u}+t\vec{v}$

(ssi) Il existe deux réels s et t tels que : $\begin{cases} x=\alpha s+\alpha' t+x_A \\ y=\beta s+\beta' t+y_A \\ z=\gamma s+\gamma' t+z_A \end{cases}$ $s\,;t\in\mathbb{R}$

avec un calcul analogue au cas d'une droite. CQFD.

Exemple 2. Intersection de deux droites dans l'espace.

On considère les deux droites D et D' dont les représentations paramétriques sont données par : D : $\begin{cases} x=3t+1 \\ y=2t-2 \\ z=-t+3 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et D' : $\begin{cases} x=2t'+1 \\ y=3t'-7 \\ z=t'-2 \end{cases}$, $t'\in\mathbb{R}$.

a) Les droites D et D' sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de D et D', s'il en existe.

c) Les droites D et D' sont elles coplanaires ? Justifier votre réponse.

A faire en classe.

Indications :

a) On cherche d'abord des vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de D et D'. Puis on vérifie si ces vecteurs sont colinéaires ou non. Si oui, elles sont parallèles ou confondues. Sinon, elles ne sont ni parallèles ni confondues.

b) On remarque que : La question b) détermine déjà la réponse à la question a). A priori, D et D' ne sont pas parallèles. Chercher les points communs revient à résoudre un système de trois équations à deux inconnues. Si on trouve un couple solution, les deux droites sont sécantes. Sinon, elles ne le sont pas.

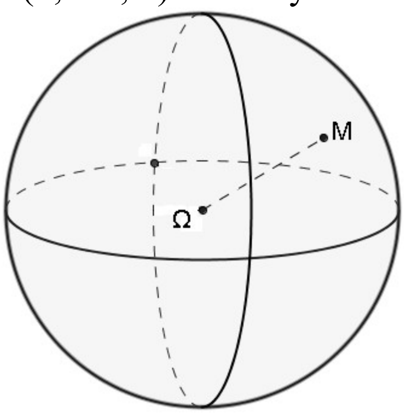
c) Conclure à partir des réponses a) et b).

Exemple 3. Intersection d'une droite et d'une sphère.

On considère la droites D dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$D : \begin{cases} x=3t+1 \\ y=2t-2 \\ z=-t+3 \end{cases} , \quad t\in\mathbb{R}$$

Déterminer les coordonnées des points d'intersection, s'il en existe, de la droite D avec la sphère S de centre Ω (1; – 1; 2) et de rayon $r=\sqrt{10}$.



1°) Cherchons d'abord une équation de la sphère $S(\Omega\,;\sqrt{10})$.

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point quelconque de l'espace. Alors :

$$\boxed{M\in S(\Omega\,;r)\ \text{(ssi)}\ \ \Omega M=r}$$

Donc : $M\in S(\Omega\,;\sqrt{10})$ (ssi) $\Omega M=\sqrt{10}$ (ssi) $\|\overrightarrow{\Omega M}\|=\sqrt{10}$,

donc par définition : (ssi) $\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{10}$

puis en élevant au carré : (ssi) $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=10$

On obtient une *équation réduite de la sphère S.*

(ssi) $x^2-2x+1+y^2+2y+1+z^2-4z+4=10$ (On développe)

(ssi) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-4=0$ (*Équation développée réduite de S*)

2°) Maintenant, on cherche les coordonnées des points d'intersection de D avec S.

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point quelconque de l'espace. Alors :

$M\in D\cap S(\Omega\,;\sqrt{10})$ (ssi) $M\in D$ et $M\in S(\Omega\,;\sqrt{10})$

(ssi) Il existe un réel t tel que $\begin{cases}x-1=3t\\ y+2=2t\\ z-3=-t\end{cases}$ et $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=10$

(ssi) Il existe un réel t tel que $\begin{cases}x-1=3t\\ y+2=2t\\ z-3=-t\end{cases}$ et $(3t)^2+(2t-1)^2+(-t+1)^2=10$

(ssi) Il existe un réel t tel que $\begin{cases}x-1=3t\\ y+2=2t\\ z-3=-t\end{cases}$ et $9t^2+4t^2-4t+1+t^2-2t+1=10$

(ssi) Il existe un réel t tel que $\begin{cases}x-1=3t\\ y+2=2t\\ z-3=-t\end{cases}$ et $14t^2-6t-8=0$

On résout l'équation du second degré $14t^2-6t-8=0$. On calcule le discriminant :

$\Delta=(-6)^2-4\times14\times(-8)$ = 36+448 = 484 = $22^2 > 0$. De plus $\Delta=22^2$.

Cette équation admet deux solutions réelles : $t_1 = 1$ et $t_2=-\frac{4}{7}$.

- pour $t_1 = 1$, on a : $x-1=3t\,;\,y+2=2t\,;\,z-3=-t$; $x_1 = 3+1=4$; $y_1 = 0$ et $z_1 = 2$.
  On obtient un premier point M_1 (4; 0 ; 2) ;
- pour $t_2=-\frac{4}{7}$, on a : $x_2=3\times\left(\frac{-4}{7}\right)+1=\frac{-5}{7}$; $y_2=2\times\left(\frac{-4}{7}\right)-2=\frac{-22}{7}$
  et $z_2=-\left(\frac{-4}{7}\right)+3=\frac{25}{7}$. On obtient le deuxième point $M_2\left(\frac{-5}{7}\,;\frac{-22}{7}\,;\frac{25}{7}\right)$.

Conclusion : La droite et la sphère sont sécantes ; c'est-à-dire que la droite D coupe la sphère en deux points M_1 et M_2 dont les coordonnées sont données ci-dessus.

CQFD