Fonction Logarithme népérien

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Fonction logarithme népérien x a $\ln x$.	◆ Connaître le sens de variation, les limites et la représentation graphique de la fonction logarithme népérien.	*On peut introduire la fonction **logarithme népérien*** grâce aux propriétés de la fonction exponentielle ou à partir de l'équation fonctionnelle.
Relation fonctionnelle, dérivée.	◆ Utiliser, pour a réel strictement positif et b réel, l'équivalence : $\ln a=b \Leftrightarrow a=e^b$. ◆ Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. ◆ Connaître et exploiter $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.	On souligne dans les cadres algébrique et graphique que les fonctions logarithme népérien et exponentielle sont réciproques l'une de l'autre. Tout développement théorique sur les fonctions réciproques est exclu. On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction logarithme en 1 et la limite en 0 de $\frac{\ln(1+x)}{x}$. On évoque la fonction logarithme décimal pour son utilité dans les autres disciplines. ◆ [SI] Gain lié à une fonction de transfert. ◆ [SPC] Intensité sonore, magnitude d'un séisme, échelle des pH. (AP) *équations fonctionnelles*.

1. De l'exponentielle au logarithme

1.1) La fonction logarithme népérien

On sait que la fonction exponentielle est définie, dérivable (donc continue) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}=]0\ ;+\infty[$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, tout nombre réel x strictement positif, admet un unique antécédent $t\in\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle.

Autrement dit : Pour tout nombre réel strictement positif, l'équation $e^t=x$, d'inconnue t, admet une solution unique $t\in\mathbb{R}$.

Théorème et définition : Pour tout nombre réel strictement positif, l'équation $e^t=x$, d'inconnue t, admet une solution unique $t\in\mathbb{R}$.
La fonction qui, à tout nombre $x > 0$, associe l'unique solution de l'équation $e^t = x$, s'appelle la fonction ***logarithme népérien*** et se note **ln** (*lire* « L,N »).
On écrit $t = \ln(x)$ ou simplement $t = \ln x$.

Exemples :

i) Pour $x = -7$, l'équation $e^t = -7$, n'admet aucune solution car $e^t > 0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Donc $\ln(-7)$ *n'existe pas*. Il en est de même pour $\ln x$, pour tout $x\leqslant 0$.

ii) Pour $x=1$, l'équation $e^t=1 \Leftrightarrow e^t=e^0 \Leftrightarrow t=0$. Donc, cette équation admet une unique solution $t = 0$. Par conséquent, $\ln 1 = 0$.

iii) Pour $x = e$, l'équation $e^t=e \Leftrightarrow e^t=e^1 \Leftrightarrow t=1$. Donc, cette équation admet une unique solution $t = 1$. Par conséquent, $\ln e = 1$.

iv) Pour $x = 5$, par définition de la fonction ln, l'équation $e^t=5$ admet une unique solution $t = \ln 5$.

A l'aide de la calculatrice, on peut déterminer une valeur approchée de **ln 5** en utilisant la fonction exponentielle. On calcule $e^1 = e = 2{,}71828...$ et $e^2=7{,}3890...$ comme $e^1< 5< e^2$, on en déduit que $1< t < 2$, c'est-à-dire $1< \ln 5 < 2$.

On rentre `Y= e^X` dans la calculatrice et, en prenant des pas de 0,1 puis 0,01 et 0,001 puis 0,0001, on obtient $t=\ln 5 \simeq 1{,}6094$. Résultat qu'on peut obtenir directement sur calculatrice en tapant : `ln(5)`.

Conséquences immédiates :

1°) Le domaine de définition de la fonction ln ainsi définie est : $D=\mathbb{R}^{+*}=]0\,;+\infty[$.

$$\ln :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln x$$

2°) D'après ce qui précède, on a : $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$ (P_0).

1.2) Propriétés de réciprocité

Propriétes et definition :

1°) Pour tout nombre réel x strictement positif, on a : $e^{\ln x}=x$. (P_{1a})

2°) Pour tout nombre réel x, on a : $\ln\left(e^x\right)=x$. (P_{1b})

On dit que les fonctions ***exp*** et ***ln*** sont ***réciproques l'une de l'autre***. Autrement dit :

Pour tout réel ***a*** strictement positif et tout réel ***b***, on a : $b=\ln a \Leftrightarrow e^b=a$ (P_{1c}).

Démonstration :

1°) On sait que, pour tout nombre réel $x> 0$, l'équation $e^t = x$, d'inconnue t, admet une solution unique $t = \ln x$. En remplaçant t par $\ln x$, on obtient $e^{\ln x}=x$. CQFD.

2°) Soit x un nombre réel. On pose : $X=e^x$. Alors $X > 0$. Or, on sait que, pour tout nombre réel $X > 0$, l'équation $e^t=X$, d'inconnue t, admet une solution unique $t = \ln X$, c'est-à-dire $t = \ln (e^x)$.

D'autre part, on sait que : $e^t=X \Leftrightarrow e^t=e^x \Leftrightarrow t=x$. d'après les propriétés de la fonction exponentielle.

Finalement, par unicité de la solution, on obtient : $\ln (e^x) = x$. CQFD.

1.3) Sens de variation et limites graphiques

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, les courbes $\boldsymbol{C}_{\exp}$ et $\boldsymbol{C}_{\ln}$ des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à *la première bissectrice*, c'est-à-dire par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

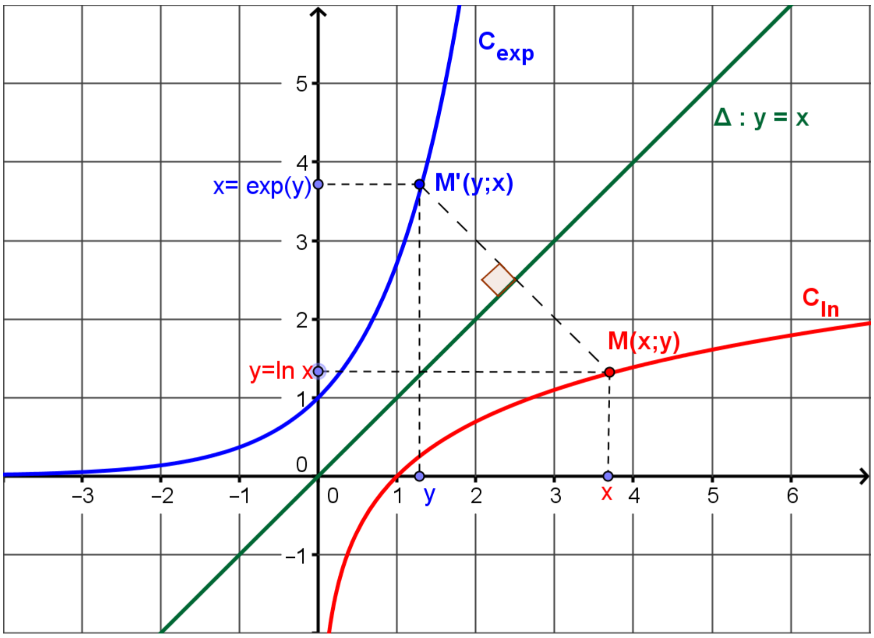
$$\boxed{M(x\,;y)\in C_{\ln} \Leftrightarrow [\,y=\ln x\,] \Leftrightarrow [\,x=e^y\,] \Leftrightarrow M'(y\,;x)\in C_{\exp}}$$

Voir figure page suivante.

Propriétes :

1°) La fonction ln est ***strictement croissante*** sur $]0\,;+\infty[$.

2°) **Limites graphiques** : a) L_1 : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$ et b) L_2 : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$



Démonstrations :

1°) Soient a et b deux nombres réels tels que $\mathbf{0 < \mathit{a} < \mathit{b}}$.
D'après les propriétés de réciprocité, on sait que $a = \ln(e^a)$ et $b = \ln(e^b)$.
Par hypothèse, $a < b$, donc $e^{\ln a} < e^{\ln b}$. Or, on sait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $\mathbf{\ln \mathit{a} < \ln \mathit{b}}$. CQFD.

2.a) **Limite en $\mathbf{0^+}$**.
Soit A un nombre réel négatif quelconque. Pour tout réel strictement positif x, on a :
$\ln x < A$ équivaut à $e^{\ln x} < e^A$, puisque la fonction exponentielle est strictement croissante équivaut à $0 < x < e^A$, d'après les propriétés de réciprocité.
Par suite, pour tout réel strictement positif x : si $0 < x < e^A$, alors $\ln x < A$.
Donc la fonction ln est inférieure à tout nombre négatif choisi au départ, à partir d'un certain rang. Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

2.b) **Limite en + ∞**
Soit A un nombre réel positif quelconque. Pour tout réel strictement positif x, on a :
$\ln x > A$ équivaut à $e^{\ln x} > e^A$, puisque la fonction exp est strictement croissante équivaut à $x > e^A$, d'après les propriétés de réciprocité.
Par suite, pour tout réel strictement positif x : si $x > e^A$, alors $\ln x > A$.
Donc la fonction ln est supérieure à tout nombre positif choisi au départ, à partir d'un certain rang. Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Consequences immediates :

Propriétes : La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$:
1°) Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, on a l'équivalence :

(P_3)	$\ln a = \ln b$ si et seulement si $a=b$

2°) Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, on a l'équivalence :

(P_4)	$\ln a < \ln b$ si et seulement si $a < b$
(P_{4bis})	$\ln a \leqslant \ln b$ si et seulement si $a \leqslant b$

3°) En particulier : pour tout nombre réel $x > 0$, le signe de $\ln x$ est donné par :

(P5) $\ln x > 0$ si et seulement si $x > 1$
$\ln x < 0$ si et seulement si $0 < x < 1$

Ces propriétés nous permettent de résoudre des équations et des inéquations.

Exemples :

1°) Résoudre l'équation : $e^{2x+1} = 3$ (E)

Tout d'abord, cette équation est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $D_E = \mathbb{R}$.

On sait que pour tous réels a et b strictement positifs : $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$.

Donc, en appliquant le logarithme aux deux membres de cette équation, on obtient :

$\ln(e^{2x+1}) = \ln 3$. Ce qui donne $2x + 1 = \ln 3$. Par suite : $x = \dfrac{-1+\ln 3}{2}$

Conclusion : Cette équation admet une seule solution et on a : $S = \left\{\dfrac{-1+\ln 3}{2}\right\}$

2°) Résoudre l'inéquation : $e^{2x+1} \leqslant 3$ (E')

Tout d'abord, cette inéquation est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $D_E = \mathbb{R}$.

On sait que pour tous a et b : $a \leqslant b$ équivaut à $\ln a \leqslant \ln b$.

Donc, en appliquant le logarithme aux deux membres de cette inéquation, on obtient :

$\ln(e^{2x+1}) \leqslant \ln 3$. Ce qui donne $2x+1 \leqslant \ln 3$. Par suite : $x \leqslant \dfrac{-1+\ln 3}{2}$

Conclusion : Cette inéquation admet pour ensemble solutions : $S = \left]-\infty ; \dfrac{-1+\ln 3}{2}\right]$

II. Étude de la fonction logarithme népérien

2.1) Fonction dérivée de ln

Propriéte :

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0 ;+\infty[$ et pour $x > 0$: $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration :

Soit x_0 un nombre réel strictement positif. Montrons que la fonction ln est dérivable en x_0 et calculons sa dérivée en ce point.

Soit x un nombre réel strictement positif au voisinage de x_0.

D'après les propriétés de réciprocité, on peut écrire : $x_0 = e^{\ln(x_0)}$ et $x = e^{\ln(x)}$

On effectue alors un changement de variable. On pose : $X_0 = \ln(x_0)$ et $X = \ln(x)$.

Et par suite : $e^{X_0} = x_0$ et $e^X = x$.

Le taux d'accroissement de la fonction ln entre x et x_0 est : $\tau(x_0 ; x) = \dfrac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0}$.

A l'aide du changement de variable, on peut écrire :

$$\tau(x_0 ; x) = \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{X - X_0}{e^X - e^{X_0}} = \frac{1}{\left(\dfrac{e^X - e^{X_0}}{X - X_0}\right)}$$

D'autre part, la fonction ln étant continue, on peut affirmer que $\lim\limits_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0$.

Ce qui donne : $\lim\limits_{x \to x_0} X = X_0$.

Donc, par composition des limites, on a : $\lim\limits_{x \to x_0} \tau(x_0 ; x) = \dfrac{1}{\lim\limits_{X \to X_0} \left(\dfrac{e^X - e^{X_0}}{X - X_0} \right)}$

Et comme la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable en X_0.
Donc, le dénominateur admet une limite finie égale au nombre dérivée de l'exponentielle en X_0.

Ainsi : $\lim\limits_{x \to x_0} \tau(x_0 ; x) = \dfrac{1}{e^{X_0}} = \dfrac{1}{x_0}$ Donc, ln est dérivable en x_0 et $\ln'(x_0) = \dfrac{1}{x_0}$.

Conclusion : La fonction ln est dérivable sur $]0 ;+\infty[$ et pour tout $x > 0$: $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

2ème méthode : On peut admettre que la fonction ln est dérivable sur $]0 ;+\infty[$ et utiliser les propriétés de réciprocité pour « calculer » la dérivée de la fonction ln.
Pour tout nombre strictement positif x, on pose $u(x) = \ln x$. On a alors :
Pour tout $x > 0$: $e^{u(x)} = e^{\ln x} = x$ .En dérivant les deux membres de cette égalité, on a :

$u'(x) \times e^{u(x)} = 1$. Ce qui donne $u'(x) \times x = 1$. Comme $x \neq 0$, on a $: u'(x) = \dfrac{1}{x}$

Conclusion : La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $x > 0$: $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

2.2) Sens de variations de la fonction ln

Nous avons déjà démontré *directement* que la fonction ln est strictement croissante sur $]0 ;+\infty[$. On peut aussi vérifier que pour tout $x > 0$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} > 0$. Ce qui prouve encore que la fonction ln est strictement croissante sur $]0 ;+\infty[$.
D'où le tableau de variations :

x	0		$+\infty$
$(\ln x)'$	‖	$+$	
$\ln x$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2.3) Dérivées composées

Propriéte :
Soit u une fonction ***dérivable*** et ***strictement positive*** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors la fonction composée f définie sur I par : $x \mapsto f(x) = \ln(u(x))$, est dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ qu'on peut écrire : $[\ln(u)]' = \dfrac{u'}{u}$.

Démonstration :
Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit f la fonction définie sur I par : $f(x) = \ln(u(x))$.
Alors f est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables et, pour tout $x \in I$: $f'(x) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$. Ce qui donne : $[\ln(u)]' = \frac{u'}{u}$. CQFD.

Exemple : Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(x^2 - 1)$.

On pose $u(x) = x^2 - 1$. Alors, la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $D =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$. u est définie et dérivable sur D, donc la fonction f est dérivable sur D, comme composée de deux fonctions dérivables u et ln.

De plus, pour tout $x \in D$, on a : $u'(x) = 2x$ et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2 - 1}$. .

2.4) Les limites de croissances comparées

Propriétés : a) L3 : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$ (*non exigible au BAC*) et b) L4 : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Démonstrations :
a) **Limite de croissances comparées en 0^+.**
Nous allons utiliser les propriétés de réciprocité et les limites de la fonction exp.
Soit $x > 0$. On effectue un changement de variable en posant $X = \ln x$. Ce qui équivaut à : $x = e^X$. Alors : $x \ln x = e^X \times X = X e^X$ et par suite : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} X = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

d'autre part, on a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} X = -\infty$ *et* $\lim\limits_{X \to -\infty} X e^X = 0$ et par composition des limites,

on obtient : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$. CQFD.

b) **Limite de croissances comparees en $+\infty$.**
Encore une fois, on fait appel aux propriétés de réciprocité et les limites de la fonction exponentielle. Soit $x > 0$. On pose $X = \ln x$. Ce qui équivaut à $e^X = x$.

Alors $\frac{\ln x}{x} = \frac{X}{e^X} = \frac{1}{\left(\frac{e^X}{X}\right)}$

D'autre part : $\lim\limits_{x \to +\infty} X = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$

Donc, par composition et quotient des limites, on obtient :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. CQFD.

Application :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - \ln x$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

On sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty}[x]=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ On obtient une forme indéterminée.

On met le terme dominant en facteur. On écrit alors : $f(x)=x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, on peut écrire : $\lim\limits_{x\to+\infty}[x]=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=1$

Donc, par produit des limites, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2.5) Limites et taux d'accroissements

Propriétés : a) L_{5a} : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$ et b) L_{5b} : $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$

Démonstration :

a) **Taux d'accroissement en 1.**

On appelle f la fonction logarithme népérien, alors pour tout $x > 0$, on a : $f(x) = \ln x$.
On sait que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. En écrivant $f'(1)$ en utilisant les deux formes de taux d'accroissements, on obtient directement les deux limites demandées :

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1.\ \text{ d'où } L_{5a}.$$

b) **Taux d'accroissement en 0.**

- On obtient directement le résultat en écrivant le taux d'accroissement de la fonction f en posant $h = x - 1$, où h tend vers 0.

$$\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=1.$$

- On peut aussi utiliser la fonction g définie par : $g(x) = \ln(1+x)$. On obtient :

$$\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(h)-g(0)}{h-0}=g'(0)=\frac{1}{1+0}=1.\ \text{ d'où } L_{5b}.\ \text{CQFD.}$$

III. Propriétés algébriques de la fonction ln

3.1) La relation fonctionnelle (ou relation fondamentale)

Propriéte :

1°) La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et vérifie la relation :

Pour tous réels x et $y > 0$: $\ln(xy)=\ln x+\ln y$ **(1)**

2°) Si f est une fonction définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et vérifie la relation :

Pour tous réels x et $y > 0$: $f(xy)=f(x)+f(y)$ **(2)**

alors il existe un réel k tel que pour tout $x > 0$: $\boldsymbol{f(x) = k \ln x}$.

Démonstration :
1°) Soit x et $y > 0$. On effectue le changement de variable : $X = \ln x$ et $Y = \ln y$.
Ce qui équivaut à dire que : $x = e^X$ et $y = e^Y$.

D'après la relation fonctionnelle de l'exponentielle, on sait que : $e^{X+Y} = e^X \times e^Y$.

Donc $e^{X+Y} = xy$. En prenant le logarithme népérien des deux membres, on obtient :
$X + Y = \ln(xy)$. Par conséquent : $\ln x + \ln y = \ln(xy)$. CQFD.

2°) Soit f une fonction définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et vérifie la relation :
Pour tous réels x et $y > 0$: $f(xy) = f(x) + f(y)$ (2)
1ère étape : Pour tout $x > 0$, on a : $f(x) = f(x \times 1) = f(x) + f(1)$ donc $f(1) = 0$.
2ème étape : Pour tout $y > 0$ fixé, on définit une fonction g sur $]0\,;+\infty[$ par :
$g(x) = f(xy) - f(x)$.

Montrons que la fonction g est constante.

Pour cela, on calcule sa dérivée de deux manières par rapport à x ; y étant considérée comme constante.

On a d'une part : $g'(x) = yf'(xy) - f'(x)$.
Et d'autre part, d'après la relation (2), on a $g(x) = f(x) + f(y) - f(x) = f(y)$.
Par suite $g'(x) = 0$, puisque $f(y)$ est une constante (qui ne dépend pas de x).
g est donc une fonction constante.

Par conséquent : $yf'(xy) - f'(x) = 0$ pour tout $x > 0$.
En particulier, pour $x = 1$, on peut écrire pour tout $y > 0$: $yf'(y) - f'(1) = 0$.

En posant : $k = f'(1)$, on obtient pour tout $y > 0$: $f'(y) = \frac{k}{y} = k \times \frac{1}{y}$ (*)

Si on pose $h(x) = f(x) - k \times \ln x$, la fonction h ainsi définie est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$: $h'(x) = f'(x) - k \times \frac{1}{x} = 0$, d'après (*).

Ainsi, la fonction h est constante et pour tout $x > 0$: $h(x) = h(1) = f(1) - k \ln 1 = 0$.
Par conséquent, pour tout $x > 0$: $f(x) = k \ln x$. CQFD.

Conclusion : Il existe un réel k tel que pour tout $x > 0$: $\boldsymbol{f(x) = k \ln x}$.

3.2) Propriétés algébriques de la fonction ln

Propriéte :
Pour tous nombres réels a et b strictement positifs et n un entier relatif, on a les propriétés suivantes :

(P$_0$) $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$ (P$_1$) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

(P$_2$) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ (P$_3$) $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$

(P$_4$) $\ln(a^n) = n \ln a$ (P$_5$) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

Démonstration :
Soit a et $b > 0$.
- (P_0) découle de la définition de la fonction ln.
- (P_1) n'est autre que la relation fondamentale démontrée en 1° ci-dessus.
- (P_2) On peut écrire : $a=b\times\frac{a}{b}$, donc d'après (P_1) on a :

$\ln a=\ln b+\ln\left(\frac{a}{b}\right)$. D'où le résultat.
- (P_4) On doit démontrer une propriété *dépendant d'un entier n*, on doit penser à un raisonnement par récurrence. Très facile.
- (P_5) On pose : $(\sqrt{a})^2=a$ donc $\ln[(\sqrt{a})^2]=\ln a$ donc $2\ln(\sqrt{a})=\ln a$. CQFD

IV. La fonction logarithme décimal

4.1) Définition et propriétés

Définition :
La ***fonction logarithme décimal***, notée log, est définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

Pour tout réel $x > 0$: $\log(x)=\frac{\ln x}{\ln 10}$; $\ln 10\simeq 2{,}30$.

Remarques : 1°) Le logarithme népérien est la « ***fonction logarithme de base e*** ». La fonction **log** est la « ***fonction logarithme de base 10*** » et se note aussi $\mathbf{log_{10}}$.

2°) La fonction logarithme décimal est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base 10 qui, à tout nombre réel *x,* fait associer $\mathbf{10}^x$.

3°) Pour tout réel $x > 0$: $\log(x)=\frac{\ln x}{\ln 10}=k\ln x$ avec $k=\frac{1}{\ln 10}\simeq 0{,}43478261\ldots>0$.

Par conséquent, la fonction logarithme décimal vérifie la relation fondamentale et par suite, « hérite » de toutes les propriétés de la fonction logarithme népérien, *sauf une !*
On sait que : ln e = 1, alors que log 10 = 1.

Propriétés :
1°) La fonction **log** est définie, dérivable et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout x > 0 : $\log'(x)=\frac{k}{x}=\frac{1}{x\ln 10}$.
2°) Pour tout réel ***a*** strictement positif et tout réel ***b***, on a : **log *a* = *b*** (ssi) ***a* = 10*^{b}***.
3°) Les limites sont toutes à multiplier par ***k***.
4°) Les propriétés algébriques sont identiques (k > 0) *sauf une !*

(P_0) log 1 = 0 et **log 10 = 1** (P_1) log (ab) = log a + log b

(P_2) $\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log a-\log b$ (P_3) $\log\left(\frac{1}{b}\right)=-\log b$

(P_4) $\log(a^n)=n\log a$ (P_5) $\log(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\log a$

Immédiat

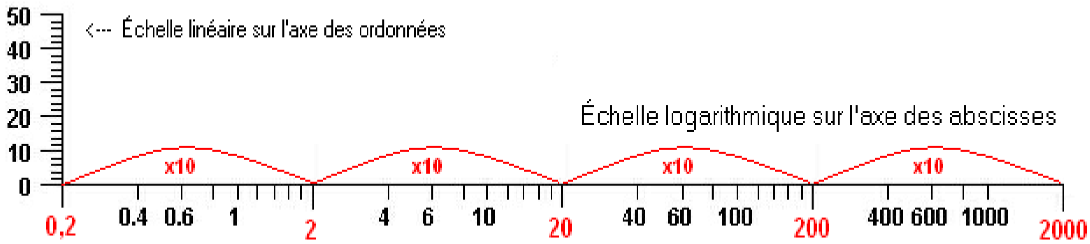
4.2) Échelles logarithmiques

<u>Source Wikipedia</u> (avec quelques aménagements) :
Mots clés : Échelle logarithmique / repère semi-logarithmique / repère log-log /

« Parfois, on utilise des unités logarithmiques, c'est-à-dire dont la valeur est le logarithme du rapport entre deux valeurs (v_{min} et v_{max}) d'une grandeur. La base logarithmique choisie dépend des habitudes de la discipline qui les utilisent :

- le logarithme népérien, dont la base est e, facilite certains calculs, mais ne permet pas d'accéder intuitivement à l'ordre de grandeur décimal.
- logarithme décimal (base 10) donne directement une notion de l'ordre de grandeur puisque *la caractéristique*, c'est-à-dire le signe et la partie avant la virgule, le donne directement. Par exemple : Une échelle, qui va dans la réalité de 10^{-10} à 10^{10}, sera représentée sur un axe allant de -10 à 10. Très utile en astronomie, statistiques, intensité sonore, magnitude d'un séisme, calcul du pH,...

  Une unité sur l'axe correspond à l'unité précédente multipliée par 10

  <u>Exemple pour le pH</u> : (potentiel en Hydrogène).

  *Le pH mesure **l'acidité** ou **la basicité** d'une solution. Le pH s'exprime selon une **échelle logarithmique de 0 à 14 unités**. Une eau pure est « **neutre** » possède un **pH de** 7 unités. Un pH inférieur à 7 indique que l'eau est **acide** alors qu'un pH supérieur à 7 indique qu'il s'agit d'une eau **alcaline** ou **basique**. La baisse d'une unité de pH implique que l'acidité est multipliée par un facteur 10. Ainsi, une eau de pH 6 est dix fois plus acide qu'une eau de pH 7; une eau de pH 5 est 100 fois plus acide qu'une eau de pH 7.*

- Le décibel, couramment utilisé en télécommunications, électronique et acoustique se définit comme 10 fois le logarithme décimal du rapport entre deux puissances, c'est-à-dire le logarithme de base 100,1 (soit environ 1,26) du rapport entre deux puissances. En effet, c'est à ce multiplicateur que correspond un décibel.
- le logarithme de base 2 sert en informatique, avec les bits et en musique, avec les octaves.

- De la même façon en musique, le demi-ton de la gamme tempérée, qui est la douzième partie de l'octave, est le logarithme de base 21÷12 (soit environ 1,06) de la fréquence.

Une échelle linéaire graduée dans une unité logarithmique équivaut à une échelle logarithmique, du point de vue de la grandeur considérée. »

...
Voir exercices du livre.