

Fonctions sinus et cosinus

Ce que dit le programme :

<p>Fonctions sinus et cosinus</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Connaître la dérivée des fonctions sinus et cosinus. • Connaître quelques propriétés de ces fonctions, notamment parité et périodicité. • Connaître les représentations graphiques de ces fonctions. 	<p>On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 et la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$</p> <p>En dehors des exemples étudiés, aucun développement n'est attendu sur les notions de périodicité et de parité.</p> <p>On fait le lien entre les résultats obtenus en utilisant le cercle trigonométrique et les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$.</p> <p>-AP- [SPC] Ondes progressives sinusoïdales, oscillateur mécanique.</p>
--	--	--

I. Parité et périodicité d'une fonction

1.1) Fonctions paires

Définition 1.

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de \mathbb{R} . On dit que D est **symétrique par rapport à zéro** ou que D est **centré en zéro**, si et seulement si :
 Pour tout $x \in \mathbb{R}$: [$x \in D$ ssi $-x \in D$]

Exemples.

\mathbb{R} , $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $[-\pi; +\pi]$, $\mathbb{R} \setminus \{-1; +1\}$ sont symétriques par rapport à zéro.
 $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $[1; +\infty[$ ne sont pas symétriques par rapport à zéro.

Définition 2.

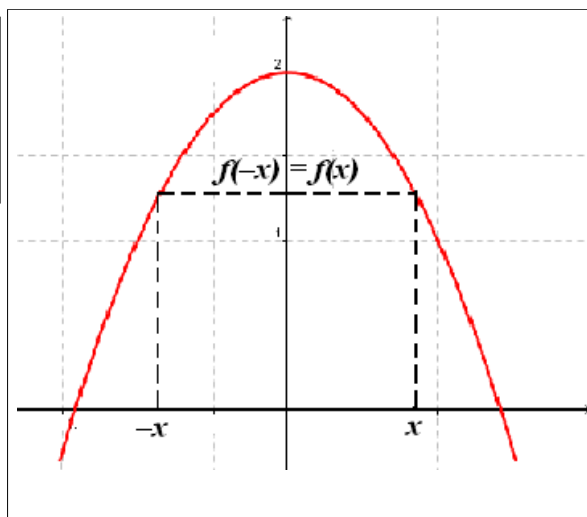
Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles \mathbb{R} et f une fonction définie sur D. On dit que **f est paire** lorsque les 2 conditions suivantes sont vérifiées :
 1°) le domaine de définition D est symétrique par rapport à zéro ;
 2°) et pour tout $x \in D$: [$f(-x) = f(x)$]

Théorème 1.

Dans un repère orthogonal (ou orthonormé), la courbe représentative d'une fonction paire est *symétrique par rapport à l'axe des ordonnées*.

Exemple :(modèle)

La fonction carrée $x \rightarrow x^2$ définie sur \mathbb{R} est une fonction paire car \mathbb{R} est symétrique par rapport à zéro et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$



1.2) Fonctions impaires

Définition 3.

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles \mathbb{R} et f une fonction définie sur D . On dit que f est **impair** lorsque les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

- 1°) le domaine de définition D est symétrique par rapport à zéro ;
- 2°) et pour tout $x \in D$: $[f(-x) = -f(x)]$

Théorème 2.

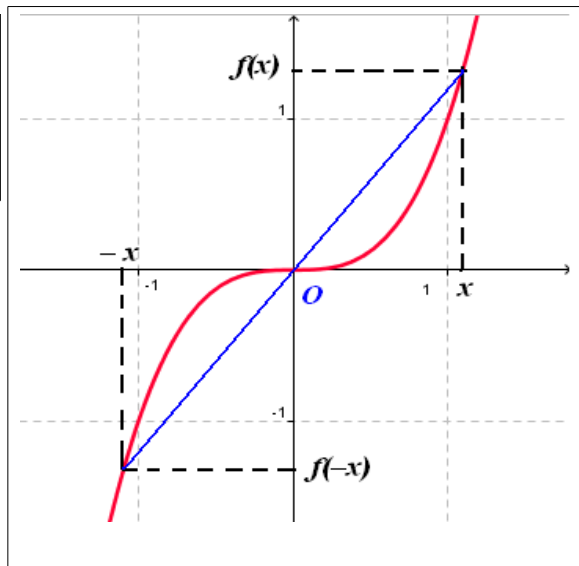
Dans un repère orthogonal (ou orthonormé), la courbe représentative d'une fonction paire est *symétrique par rapport à l'origine O du repère*.

Exemple :(modèle)

La fonction cube $x \rightarrow x^3$ définie sur \mathbb{R} est une fonction impaire car

$D_f = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$



Remarque : Si une fonction est paire ou impaire, on réduit le domaine d'étude à la partie positive de D_f . La courbe de f peut alors se construire *par symétrie* par rapport à l'axe des ordonnées ou par rapport à l'origine O du repère.

1.3) Fonctions périodiques

Définition 4.

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de \mathbb{R} et f une fonction définie sur D et $T \in \mathbb{R}$ un nombre réel donné. On dit que f est **périodique de période T** lorsque les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

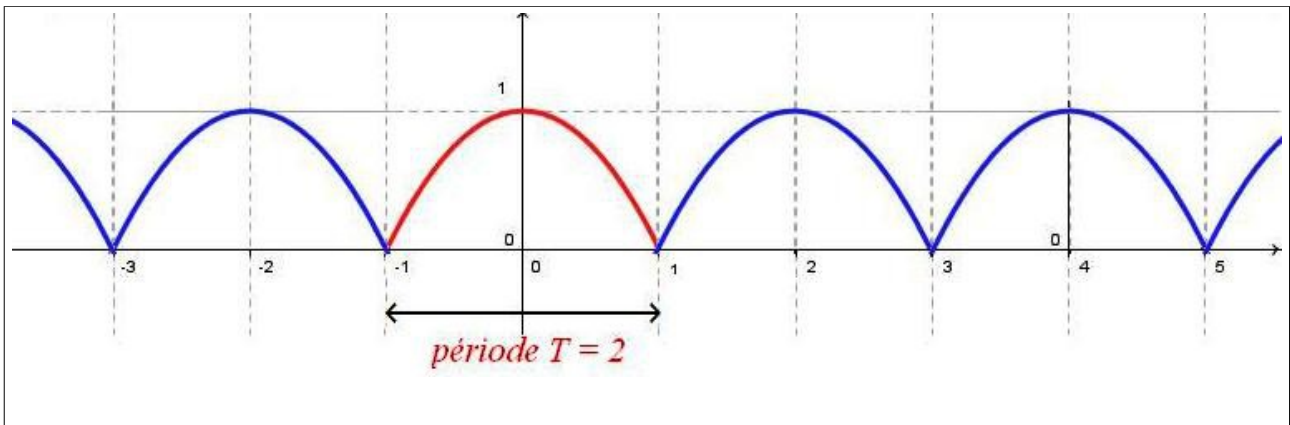
- 1°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $[x \in D \text{ ssi } x+T \in D]$
- 2°) et pour tout $x \in D$: $[f(x+T) = f(x)]$

Remarque : Pour construire la courbe d'une fonction périodique f de période $T \in \mathbb{R}$, on construit (une portion de) la courbe sur un intervalle de longueur T , puis *on duplique indéfiniment* cette portion à droite et à gauche.

On dit qu'on a réduit le domaine d'étude à un intervalle de longueur T de D_f .

Exemple.

Pour construire sur \mathbb{R} la fonction périodique de période $T = 2$ et définie pour $x \in [-1; +1]$ par : $f(x) = 1 - x^2$, il suffit de construire la courbe de f sur un intervalle de longueur une période, ici $[-1; +1]$, puis dupliquer indéfiniment.



II. Fonctions trigonométriques

2.1) Rappels et définitions

Dans un repère orthonormé $(O ; I, J)$ du plan, soit M un point quelconque du cercle trigonométrique $C(O; 1)$ tel que la mesure en *radians* de l'angle orienté (\vec{OI}, \vec{OM}) soit égale à x radians. On dit que M est le *point associé* à x sur le cercle $C(O; 1)$.

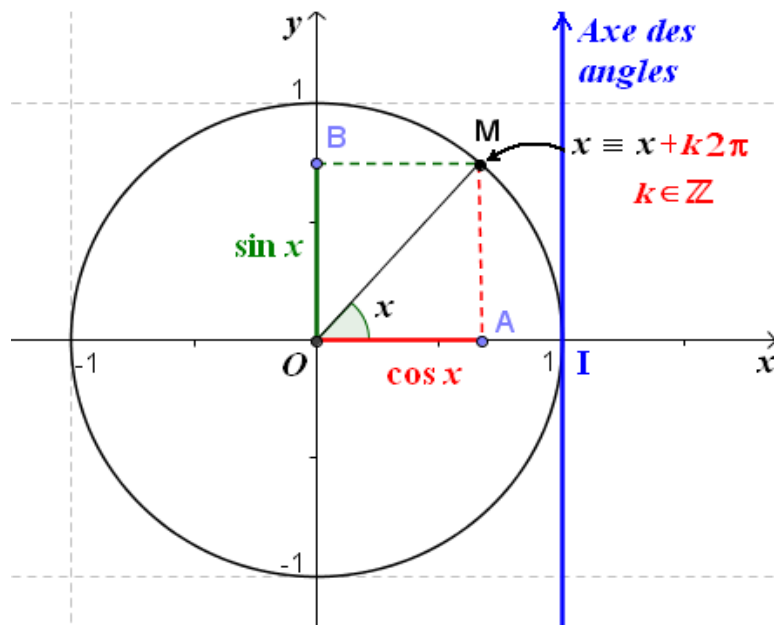
Définition 1.

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan, soit x un nombre réel et M le point associé à x sur $C(O; 1)$. Alors

- le **cosinus de x** , noté **$\cos x$** , désigne l'abscisse du point M ;
- le **sinus de x** , noté **$\sin x$** , désigne l'ordonnée du point M .

On définit ainsi deux fonctions, **cos** et **sin** sur \mathbb{R} comme suit :

$$\begin{array}{l} \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos x \quad \quad \quad x \mapsto \sin x \end{array}$$



2.2) Propriétés

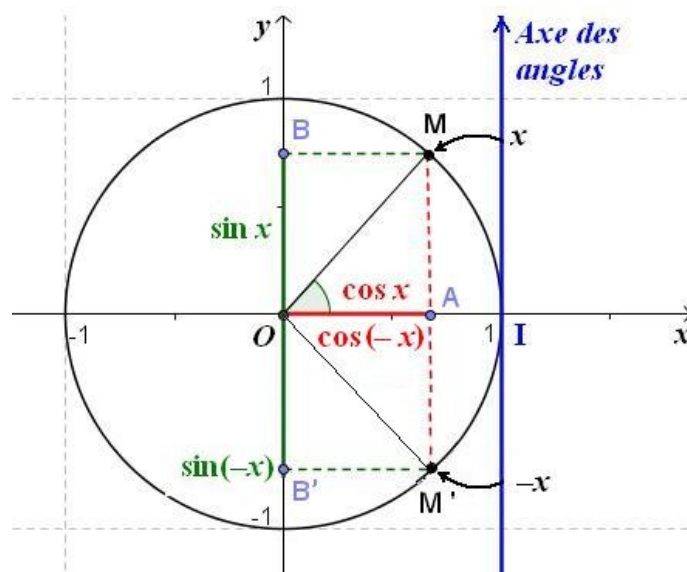
Propriété 1.

Les fonctions cosinus et sinus sont *définies* et *continues* sur tout \mathbb{R} . De plus :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos(-x) = \cos x$. Donc la fonction cosinus est *paire*.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin(-x) = -\sin x$. Donc la fonction sinus est *impaire*.

Par conséquent, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan,

- La courbe de la fonction *cosinus* est *symétrique* par rapport à *l'axe des ordonnées*. Donc, on peut réduire son intervalle d'étude à $[0; +\infty[$.
- La courbe de la fonction *sinus* est *symétrique* par rapport à *l'origine O* du repère. Donc, on peut aussi réduire son intervalle d'étude à $[0; +\infty[$.



Soit M un point quelconque du cercle trigonométrique tel que la mesure de l'angle orienté (\vec{OI}, \vec{OM}) soit égale à x radians. On peut lui associer une famille de nombres réels de la forme $x + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, qui correspondent au *même point M* du cercle trigonométrique.

Propriété 2.

Les fonctions cosinus et sinus sont *périodiques* de *période* $T = 2\pi$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

En effet; les nombres x et $x + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, correspondent au *même point M* du cercle trigonométrique. Donc x et $x + k2\pi$ ont exactement le même cosinus en abscisse et le même sinus en ordonnée.

Par conséquent, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan, on peut réduire l'intervalle d'étude des fonctions cosinus et sinus à un intervalle de longueur

$T = 2\pi$. Par exemple, $D = [-\pi; +\pi]$.

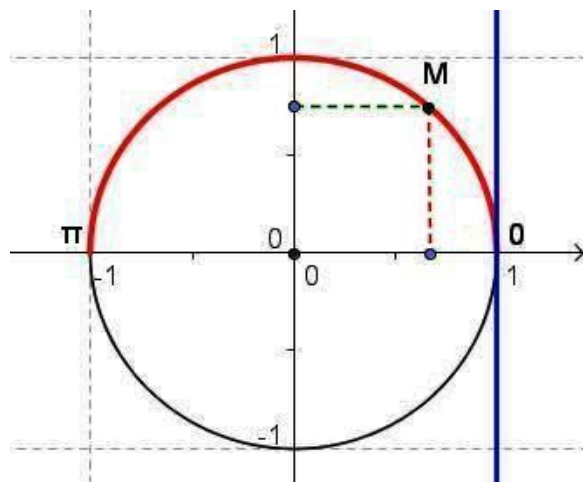
Propriété 3.

Les fonctions cosinus et sinus sont *dérivables* sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$[\cos(x)]' = -\sin x$$

$$[\sin(x)]' = \cos x$$

En effet ; les démonstrations nécessitent l'utilisation des formules trigonométriques vues en classe de 1ère S. (*A admettre !*)



Ces deux fonctions sont périodiques de période $T=2\pi$, on peut restreindre l'étude à l'intervalle $[-\pi; +\pi]$. Et comme la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire, on peut encore restreindre l'étude à la partie positive de cet intervalle, c'est-à-dire, à $I=[0; \pi]$.

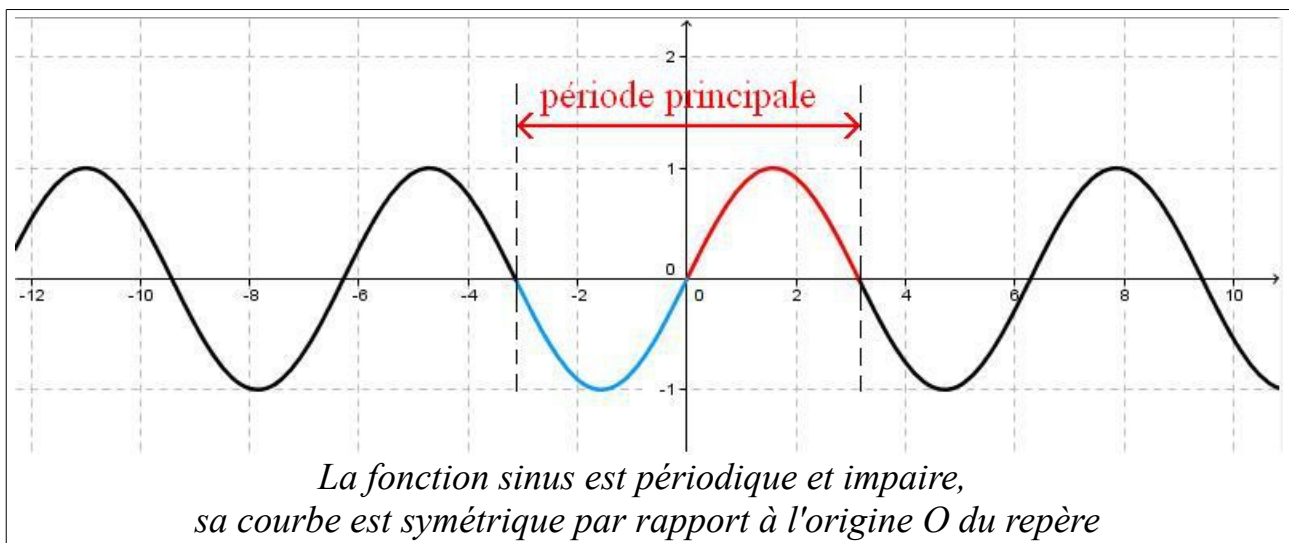
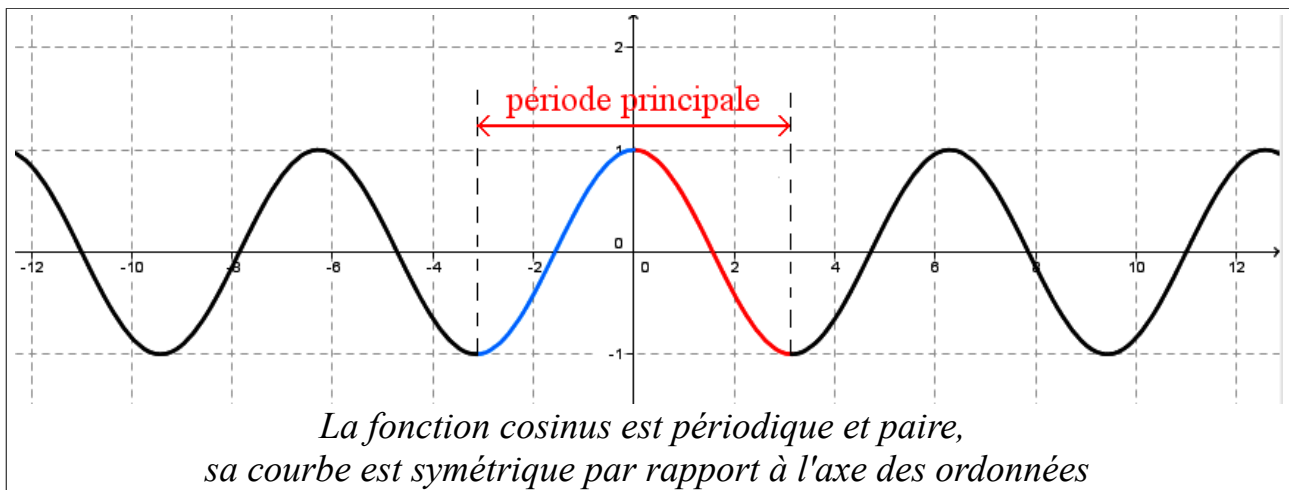
Par lecture graphique sur le cercle trigonométrique, on peut déterminer le signe de $\sin x$ et de $\cos x$. Ce qui nous permet de déterminer le signe de la dérivée de ces deux fonctions sur $I=[0; \pi]$. On obtient les tableaux de variations suivants :

x	0	π	
$\cos'(x)$	0	-	0
$\cos x$	1	↘ -1	

x	0	$\pi/2$	π	
$\sin'(x)$		+	0	-
$\sin x$	0	↗ 1 ↘ 0		

Construction des courbes :

Pour construire sur \mathbb{R} une fonction périodique de période $T=2\pi$ et définie sur \mathbb{R} par : $f(x)=\cos x$ ou $g(x)=\sin x$, il suffit de construire la courbe de f et de g sur un intervalle de longueur la moitié d'une période, ici $[0; +\pi]$, puis prendre le symétrique par rapport à Oy pour cosinus (fonction paire) ou par rapport à l'origine O pour sinus (fonction impaire) pour obtenir une période ; puis dupliquer indéfiniment à droite et à gauche par périodicité.



2.3) Dérivées de fonctions composées avec cos et sin

Propriété 1.

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} , alors les fonctions composées $f : x \rightarrow \cos(u(x))$ et $g : x \rightarrow \sin(u(x))$ sont définies et dérivables sur I et :

$$\text{et : } [\cos(u)]' = -u' \times \sin(u) \quad \text{et} \quad [\sin(u)]' = u' \times \cos(u)$$

Pour tout $x \in I$: $f'(x) = -u'(x) \times \sin(u(x))$ et $g'(x) = u'(x) \times \cos(u(x))$.

Exemples.

1°) Si $u(x) = ax + b$, les fonctions $f : x \rightarrow \sin(ax + b)$ et $g : x \rightarrow \cos(ax + b)$ sont définies et dérivables sur \mathbb{R} et $f'(x) = a \times \cos(ax + b) = a \cos(ax + b)$, et $g'(x) = -a \times \sin(ax + b) = -a \sin(ax + b)$.

2°) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sin(3x^2 + 5)$

On pose $u(x) = 3x^2 + 5$, alors $u'(x) = 6x$. La fonction composée définie par $f(x) = \sin(u(x))$ est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = u' \times \cos(u) = 6x \cos(3x^2 + 5)$.

3°) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \cos(\sqrt{x})$

On pose $u(x) = \sqrt{x}$, alors u est définie sur $]0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. La fonction composée définie par $f(x) = \cos(u(x))$ est dérivable

sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = -u' \times \sin(u) = \frac{-1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})$.

4°) Soit f la fonction « tangente » définie par : $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Les deux fonctions \cos et \sin sont définies et dérivables sur \mathbb{R} . Donc la fonction tangente est définie et dérivable sur \mathbb{R} privé de tous les points où le cosinus est nul.

$x \in D_{\tan}$ (ssi) $x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Donc $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

La fonction tangente est impaire et périodique de période π [à vérifier] et pour

tout $x \in D_{\tan}$: $\tan x$ s'écrit sous la forme $u(x)/v(x)$, avec $u(x) = \sin x$, donc

$u'(x) = \cos x$ et $v(x) = \cos x$, donc $v'(x) = -\sin x$. Par conséquent :

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

ou bien en séparant les deux termes du numérateur, on obtient :

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

2.4) Calcul d'une limite particulière.

Propriété 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Démonstration

On sait par définition qu'une fonction f est dérivable en a si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin x$. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} donc en particulier en 0. De plus $f'(x) = \cos x$, $f(0) = \sin 0 = 0$ et $f'(0) = \cos 0 = 1$.

Par suite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = \cos 0 = 1.$$

CQFD.

On peut généraliser ce modèle de démonstration à toutes les formes 0/0 avec au dénominateur $x - a$. Par exemple :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

A vous de jouer ...et amusez-vous avec $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$ Cherchez l'astuce...

III. Exemples d'étude de fonctions

Exemple 1.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \cos(2x) + 1$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Montrer que f est périodique de période $T = \pi$.
- Étudier la parité de f .
- En déduire l'intervalle d'étude I de f .
- Étudier le sens de variation de f .
- Construire C_f sur I puis sur \mathbb{R} .

Tout d'abord, nous cherchons le domaine de définition de f . La fonction cosinus n'a aucune valeur interdite donc : $D_f = \mathbb{R}$.

a) Montrer que f est périodique de période $T = \pi$.

On sait D_f est *périodique de période π* . De plus, pour tout $x \in D_f$:

$$f(x+T) = f(x+\pi) = \cos(2 \times (x+\pi)) + 1 = \cos(2x + 2\pi) + 1 = \cos(2x) + 1 = f(x).$$

car la fonction cosinus est périodique de période 2π .

Par suite

$$f(x+T) = f(x+\pi) = \cos(2 \times (x+\pi)) + 1 = \cos(2x + 2\pi) + 1 = \cos(2x) + 1 = f(x).$$

Conclusion : *La fonction f est périodique* de période $T = \pi$. Donc, on peut réduire son domaine d'étude à un intervalle de longueur π , par exemple $[0; \pi]$ ou $[-\pi/2; \pi/2]$. On reproduira la courbe par périodicité.

b) Étude de la parité de f .

La fonction cosinus étant paire, nous avons :

D_f est *symétrique par rapport à 0*. et pour tout $x \in D_f$:

$$f(-x) = \cos(2 \times (-x)) + 1 = \cos(-2x) + 1 = \cos(2x) + 1 = f(x).$$

Par suite $f(-x) = f(x)$.

Conclusion : *La fonction f est paire*. Par conséquent, on peut réduire son domaine d'étude à la partie positive de son domaine de définition. On construira l'autre moitié de la courbe par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

c) En déduire l'intervalle d'étude I de f .

On sait que la fonction f est paire et périodique de période π . Par conséquent, on peut réduire l'intervalle d'étude à : $I = [0; \pi/2]$.

d) Étudier le sens de variation de f .

Pour étudier le sens de variation de f , nous devons calculer la dérivée f' de f et étudier son signe. On sait que $[\cos(ax+b)]' = -a \sin(ax+b)$.

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = -2 \sin(2x)$$

Donc, pour tout $x \in [0, \pi/2]$ on a :

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } \sin(2x) = 0 \text{ ssi } 2x = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ssi } x = 0 \text{ ou } x = \pi/2 \text{ sur } [0; \pi/2]$$

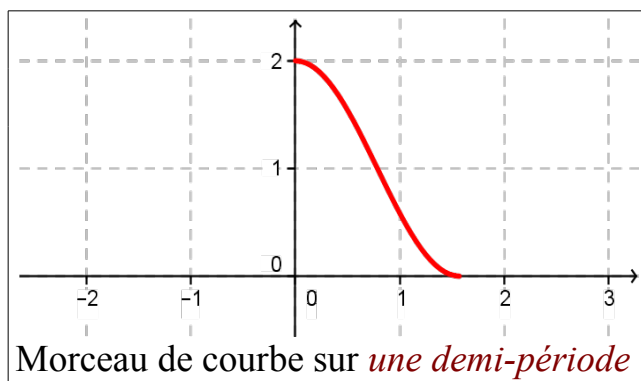
D'autre part, pour tout $x \in]0; \pi/2[$ on a $2x \in]0; \pi[$ donc $\sin(2x) > 0$

et comme $f'(x) = -2 \sin(2x)$ on a $f'(x) < 0$ sur $]0; \pi/2[$

La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0, \pi/2]$.

e) Construire C_f sur I puis sur \mathbb{R}

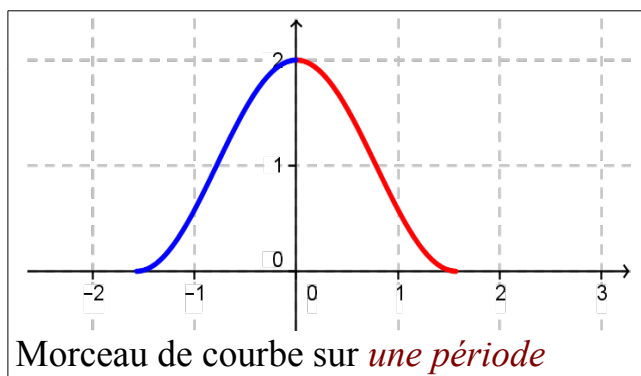
x	0		$\pi/2$
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	2		0



f est paire donc, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

$$\pi/2 \approx 1,5708\dots$$

x	$-\pi/2$	0	$\pi/2$		
$f'(x)$	0	+	0	-	0
$f(x)$	0	2	0		



La fonction f étant périodique de période π , on peut reproduire indéfiniment cette courbe à droite et à gauche par périodicité.

