Raisonnement par récurrence
Suites numériques

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Raisonnement par récurrence.	Savoir mener un raisonnement par récurrence.	Ce type de raisonnement intervient tout au long de l'année et pas seulement dans le cadre de l'étude des suites.
Limite finie ou infinie d'une suite.	Dans le cas d'une limite infinie, étant donnés une suite croissante (u_n) et un nombre réel A, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A.	Pour exprimer que la suite (u_n) tend vers l quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs un à partir d'un certain rang ». Pour exprimer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle de la forme] A, $+\infty$ [contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». Comme en classe de première, il est important de varier les approches et les outils sur lesquels le raisonnement s'appuie. On présente des exemples de suites qui n'ont pas de limite.
Limites et comparaison.	Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que : - u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang ; - u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$; alors v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.	On démontre que si une suite est croissante et admet pour limite l, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à l. Le théorème dit « des gendarmes » est admis.
Opérations sur les limites. Comportement à l'infini de la suite (q^n), q étant un nombre réel. Suite majorée, minorée, bornée.	Étudier la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites. Démontrer que la suite (q^n), avec $q>1$, a pour limite $+\infty$. Déterminer la limite éventuelle d'une suite géométrique. Utiliser le théorème de convergence des suites croissantes majorées.	On démontre par récurrence que pour a réel strictement positif et tout entier naturel n : $(1+a)n \geq 1+na$. On peut étudier des situations où intervient la limite de la somme des premiers termes d'une suite géométrique. Ce théorème est admis. Il est intéressant de démontrer qu'une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$. Des exemples de suites récurrentes, en particulier arithmético-géométriques, sont traités en exercice. Des activités algorithmiques sont menées dans ce cadre.

I. Le raisonnement par récurrence

1.1) Les nombres de Fermat

Un **nombre de Fermat** est un entier naturel qui s'écrit sous la forme $2^{2^n}+1$, où n est un entier naturel. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on note $F_n=2^{2^n}+1$ le (n+1)-ème nombre de Fermat.
Calculer F_0, F_1, F_2, F_3, F_4. Que constatez-vous ?
Le mathématicien français Pierre de Fermat a émis la *conjecture* que « *pour tout $n\in\mathbb{N}$, F_n est un nombre premier* » en 1640. Il s'avère que cette conjecture est fausse. Presque un siècle plus tard, le premier à lui porter la contradiction, est le mathématicien suisse Leonhard Euler en présentant un diviseur (donc deux diviseurs au moins) de F_5 prouvant qu'« *il existe au moins un nombre de Fermat qui n'est pas premier* ».

Blaise Pascal, à 19 ans, en 1642 invente la première (calculatrice) « machine arithmétique ».
Mais, existe-il un moyen de démontrer qu'une propriété dépendant d'un entier n, est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$ sans passer par la calculatrice ?

1.2) Étude d'un exemple

Exemple 1. Pour chaque entier naturel n, on considère la proposition logique P_n : « 4^n +5 est un multiple de 3 ». On se propose de « démontrer » que :

Pour tout entier n, P_n est vraie.

On peut facilement vérifier que c'est le cas pour une ou quelques valeurs de n.

Par exemple :
P_0 : $4^0+5 = 1+5 = 6$ est un multiple de 3. Donc P_0 est vraie.
P_1 : $4^1+5 = 4+5 = 9$ est un multiple de 3. Donc P_1 est vraie.
P_2 : $4^2+5 = 16+5 = 21$ est un multiple de 3. Donc P_2 est vraie.
P_3 : $4^3+5 = 64+5 = 69$ est un multiple de 3. Donc P_3 est vraie.
P_4 : $4^4+5 = 256+5 = 261$ est encore un multiple de 3. Donc P_4 est vraie.
Et ainsi de suite...
Mais, ceci ne prouve pas que P_n est vraie pour tout entier n !

Nous allons voir qu'un raisonnement par récurrence permet de faire cette démonstration.

1.3) Principe du raisonnement par récurrence

Théorème :
Soit n_0 un entier naturel donné. Pour chaque entier naturel $n \geq n_0$, on considère la proposition logique P_n dépendant de l'entier n.
Pour démontrer que « Pour tout entier $n \geq n_0$, P_n est vraie » il est ***équivalent*** de démontrer que :
1°) P_{n_0} est vraie [*Initialisation*] ;
2°) Pour tout entier n : [$P_n \Rightarrow P_{n+1}$] [*Hérédité*].
(Autrement dit : pour tout entier n : si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie).

Définition :
Soit n_0 un entier naturel donné. Pour chaque entier naturel $n \geq n_0$, on considère la proposition logique P_n dépendant de l'entier n.
On dit que la proposition P_n est *héréditaire à partir du rang n_0* lorsque, pour tout entier n : [si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie].

Revenons à notre **exemple 1**.
On veut démontrer que : Pour tout entier n « 4^n+5 est un multiple de 3 ».

Méthode (en rouge) : (commentaire en *italic*)
On commence par nommer la proposition logique :
On appelle P_n la proposition logique « 4^n+5 est un multiple de 3 ».
Montrons par récurrence que : Pour tout entier n : [P_n est vraie].
1°) Initialisation. *(On vérifie pour le premier rang. Ici on commence à 0)*.
Pour $n = 0$, $4^0+5 = 1+5 = 6$ est *(bien)* un multiple de 3. Donc P_0 est vraie.

2°) Hérédité.
Soit $n \in \mathbb{N}$ *(sous-entendu $n \geq n_0$).*
Supposons que P_n est vraie. (Hypothèse de récurrence).
Montrons que P_{n+1} est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que : « 4^n+5 est un multiple de 3 » (HR)
On traduit cette affirmation par un énoncé mathématique.
Donc, il existe un entier k tel que $4^n+5 = 3k$. Ici $k \geq 2$ car $n \geq 0$.
Et là, on essaie d'exprimer « $4^{n+1}+5$ » à l'aide de k.
Nous avons un élément commun « 4^n ». On l'exprime à l'aide de k pour faire le lien.

On a alors : $4^n = 3k - 5$.
Or, [*Astuce élémentaire*] *d'après le cours de la classe de 4ème :* $4^{n+1}=4^n \times 4^1=4^n \times 4$.
On remplace 4^n par $3k - 5$ dans cette égalité.
Et on écrit : $4^{n+1}=(3k-5)\times 4$
Donc : $4^{n+1}+5=(3k-5)\times 4+5$
Donc : $4^{n+1}+5=12k-20+5$
Donc : $4^{n+1}+5=12k-15$
D'où : $4^{n+1}-5=3(4k-5)$
On pose $k' = 4k - 5$. Comme k est un entier supérieur ou égal à 2, on en déduit que $k' \geq 3$.
Par conséquent : « Il existe un entier k' tel que : $4^{n+1}+5$ est un multiple de 3 ».
Ce qui montre que P_{n+1} est vraie. Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion. Pour tout entier *n*, P_n est vraie.

Exemple 2. Soit a un nombre réel strictement positif.
Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $(1+a)^n \geq 1+na$.
Cette inégalité s'appelle **Inégalité de Bernoulli**.

On suit notre méthode (cette fois sans commentaire!).
On appelle P_n la proposition logique « $(1+a)^n \geq 1+na$ ».
Montrons par récurrence que : Pour tout entier n : [P_n est vraie].
1°) Initialisation.
Pour $n = 0$, $(1+a)^0=1=1+0\times a$. Donc $(1+a)^0 \geq 1+0\times a$. Donc P_0 est vraie.

2°) Hérédité.
Soit $n \in \mathbb{N}$
Supposons que P_n est vraie. (Hypothèse de récurrence).
Montrons que P_{n+1} est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que : $(1+a)^n \geq 1+na$ (HR)
Mais alors [*Astuce élémentaire*], on sait que $(1+a)^{n+1}=(1+a)^n \times (1+a)$
Or, par hypothèse de récurrence (HR) , on sait que $(1+a)^n \geq 1+na$ (*)
D'après l'énoncé, a est un nombre réel strictement positif, donc $1+a>1$.
Donc, on peut multiplier les deux membres de l'inégalité (*) par $(1+a)$ sans changer de sens. On obtient : $(1+a)^n \times (1+a) \geq (1+na)(1+a)$

En développant l'expression de droite, on obtient : $(1+a)^{n+1} \geq 1+na+a+na^2$

Comme $na^2 \geq 0$, on a : $1+na+a+na^2 \geq 1+na+a=1+(n+1)a$.
Par conséquent : $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$.
Ce qui montre que P_{n+1} est vraie. Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion. Pour tout entier n, P_n est vraie.

Exemple 3. Démontrez que pour tout entier non nul n, la somme des n premiers nombres entiers non nuls, est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.
Dans cet exemple, la propriété P_n n'est pas exprimée concrètement.

1ère étape : Exprimer et nommer la propréte P_n.
Pour chaque entier naturel n, non nul (*ici on commence à* $n_0 = 1$), on appelle P_n la proposition logique : « $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ » ou encore « $\sum_{k=1}^{k=n} k=\frac{n(n+1)}{2}$ »
Montrons, par récurrence que : Pour tout entier n : [P_n est vraie].

1°) Initialisation.
Pour $n = 1$, il n'y a qu'un seul terme dans la somme de gauche qui est égal à 1.
A droite, on a $\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$ D'où l'égalité. Donc P_1 est vraie.

2°) Hérédité.
Soit $n \in \mathbb{N}$
Supposons que P_n est vraie. (Hypothèse de récurrence).
Montrons que P_{n+1} est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que : $\sum_{k=1}^{k=n} k=\frac{n(n+1)}{2}$ (HR)
Mais alors, [*Astuce élémentaire : la somme des* $(n+1)$ *premiers nombres est égale à la somme des n premiers nombres, plus le* $(n+1)$*-ème*], on sait que :

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=[1+2+3+\cdots+n]+(n+1)$$

(*)

Or, par hypothèse de récurrence (HR) , on sait que : $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
On remplace 1+2+3+...+n par la fraction dans l'égalité (*) et on obtient :
$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$ puis on réduit au même dénominateur.
Ce qui donne : $1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, qu'on peut encore écrire :
$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$. Ce qui n'est autre que l'expression de P_{n+1}.
Ce qui montre que P_{n+1} est vraie. Donc la propriété est héréditaire.
Conclusion. Pour tout entier n, P_n est vraie.

II. Rappels sur les suites (classe de 1ère S)

2.1) Définition

Soit p un nombre entier naturel.
Une suite numérique est une fonction u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (ou à partir d'un certain rang p), qui à tout $n \geq p$, fait correspondre son image $u(n)$ qu'on note aussi u_n.

La suite se note $(u_n)_{n \geq p}$ ou simplement (u_n).
u_n s'appelle le *terme de rang n* ou encore le *terme général* de la suite.
$u_p = u(p)$ (ou u_0 si $p=0$) est le *premier terme* ou le *terme initial* de la suite .

2.2) Deux types de définition des suites

Définition des suites type 1 : (suites explicites)

Soit f une fonction définie sur $[a, +\infty[$ où a est un nombre réel positif ou nul.
Si pour tout $n \geq a$, $u_n = f(n)$, le terme général de la suite (u_n) s'écrit en fonction de l'entier n, on dit que (u_n) est une suite définie par une *formule explicite* ou *définie explicitement en fonction de n*. f s'appelle *la fonction associée* à la suite (u_n).

Remarque : Si on a une relation du type $u_n = f(n)$, alors pour tout $n \geq a$, u_n peut être calculé directement à partir de n.

Exemple : Calculer les deux premiers termes, puis u_{10} de la suite définie par : $u_n = \dfrac{6}{n(n-1)}$.

Il est clair que la suite (u_n) est définie à partir de $n=2$. u_0 et u_1 n'existent pas. Donc :

$$u_2 = \frac{6}{2\times(2-1)} = \frac{6}{2} = 3 \quad ; \quad u_3 = \frac{6}{3\times(3-1)} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{et} \quad u_{10} = \frac{6}{10\times(10-1)} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15} .$$

Ici, la fonction associée à cette suite est définie par : $f(x) = \dfrac{6}{x(x-1)}$.

Définition des suites type 2 : (suites récurrentes)

Une *suite récurrente* est une suite définie par la donnée d'un premier terme et une *formule de récurrence* qui permet de calculer chaque terme *en fonction* du terme précédent pas à pas. Autrement dit :

$$\begin{cases} v_0 \in \mathbb{R} \\ v_{n+1} = g(v_n), n \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} v_0 \in \mathbb{R} \\ v_n = g(v_{n-1}), n \geq 1 \end{cases}$$

g s'appelle *la fonction associée* à la suite (v_n) .

Exemple : calculer les deux premiers termes, puis u_{10} de la suite définie par récurrence :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n + 10 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$$ où g est la fonction associée définie par $g(x) = \frac{1}{2}x + 10$.

On a donc $w_1 = \dfrac{1}{2} \times w_0 + 10 = \dfrac{1}{2} \times 1 + 10 = \dfrac{21}{2}$, $w_2 = \dfrac{1}{2} \times w_1 + 10 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{21}{2} + 10 = \dfrac{61}{4}$

Pour calculer v_{10} , il faut calculer v_9 et tous les termes précédents....

***Trop long** pour un calcul à la main ! On peut donc utiliser un tableur ou la calculatrice ou un logiciel de calcul formel.*

2.3) Avec un tableur

Pour calculer les termes d'une suite avec un tableur :

<table>
<tr><th>Suites définies explicitement</th><th>Suites récurrentes</th></tr>
<tr><td>

	A	B
1	0	= u(A1)
2	=A1+1	= u(A2)

Sélectionner A2B2, puis tirer vers le bas, jusqu'à la valeur de n cherchée dans la colonne A. Les termes de la suite sont dans la colonne B.</td><td>

	A	B
1	0	v_0 (donné)
2	=A1+1	= v(B1)

Sélectionner A2B2, puis tirer vers le bas, jusqu'à la valeur de n cherchée dans la colonne A. Les termes de la suite sont dans la colonne B.</td></tr>
</table>

2.4) Avec une calculatrice

<table>
<tr><th>Texas : TI82 Stats et modèles sup.
[E] = Enter [V]=Vert</th><th>Casio : Graph 35+ et modèles sup.</th></tr>
<tr><td>Taper sur la touche MODE
Sélectionner SEQ ou SUITE
Sélectionner Y=, ou f(x)= , puis :
nMin=... Valeur du 1er rang = 0 ou 1
u(n)=..., Expression suite explicite
u(nMin)=..., Terme initial à rentrer pour une suite récurrente.
[V]TABLE, donne la table des valeurs.

Les flèches de directions permettent d'obtenir les valeurs suivantes.</td><td>Taper sur la touche MENU
Sélectionner RECUR
Sélectionner TYPE (F3)
an = An+B , Définition explicite
an+1=Aan+Bn+C, Suite récurrente
an+2 = Aan+1+Ban+..., Suite récurrente du 2ème ordre... Hors pgm
Rentrer la formule, puis
(F5) SET, détermine début et fin du rang et le terme initial, suites récurrentes.
(F6) TABLE, donne la table des valeurs.</td></tr>
</table>

Voir Calculatrices & logiciels dynamiques (Très complet ! Merci Xavier Delahaye).

2.5) Avec un algorithme

Soit N un entier donné. Calculer la valeur du N-ème terme de suite récurrente de premier terme $u_0 = 1$ et pour tout entier n : $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 10$.

<table>
<tr><td>Déclaration de Variables
k un nombre entier
N un nombre entier
U un nombre
Traitement :
Début de l'algorithme
Lire N
Affecter à k la valeur 0
Affecter à U la valeur u₀=1</td><td>Pour k allant de 1 à N
    Debut de Pour
    Affecter à U la valeur (1/2)*U +10
    Fin de Pour
Afficher Message « U(»
Afficher N
Afficher Message «)= »
Afficher U
Fin de l'algorithme

En gris, pour l'affichage à l'écran de « U(N)= »</td></tr>
</table>

III. Sens de variations d'une suite

3.1) Suites croissantes, suites décroissantes

Définition 1 :

1) La suite (u_n) est dite croissante (ssi) pour tout entier n : $u_{n+1} \geqslant u_n$
   (ssi) pour tout entier n : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ (*méthode de la différence*).
2) La suite (u_n) est dite décroissante (ssi) pour tout n : $u_{n+1} \leqslant u_n$
   pour tout n : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ (*méthode de la différence*).
3) La suite (u_n) est dite constante (ou stationnaire) à partir d'un certain rang
   (ssi) il existe un entier p, tel que pour tout $n \geqslant p$: $u_{n+1} = u_p$.
4) La suite (u_n) est dite monotone (ssi) elle est croissante ou décroissante.

Méthodes *: On peut utiliser des **démonstrations directes** pour des suites explicites ou des démonstrations **par récurrence** pour des suites récurrentes.*

Exemples :

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) de terme général : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

1ère méthode (directe) : Étude du signe de la différence de deux termes consécutifs.

$$u_{n+1} - u_n = \left[1 + \frac{1}{(n+1)}\right] - \left[1 + \frac{1}{n}\right] = 1 + \frac{1}{(n+1)} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

$u_{n+1} - u_n < 0$ donc $u_{n+1} < u_n$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

2ème méthode : Étude du sens de variation de la fonction associée f à la suite (u_n).

Propriété 1. :

Si la suite (u_n) est définie explicitement en fonction de n du type $u_n = f(n)$, la suite (u_n) a le même sens de variations que la fonction associée f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Exemple : Étudier le sens de variation de la suite (u_n) de terme général : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

La fonction associée f à cette suite est définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Donc la fonction associée f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$. Par conséquent, la suite (u_n) est décroissante, car pour tout entier n :

$n < n+1$ donc $f(n+1) < f(n)$ donc $u_{n+1} < u_n$. CQFD

3ème méthode : Raisonnement par récurrence, voir Fiche-BacS n°1.

3.2) Suites majorées, minorées, bornées

<u>Définitions 1</u> :

1°) La suite (u_n) est dite ***minorée*** (ssi) Il existe un réel m tel que, pour tout entier n : $u_n \geqslant m$ (ssi) Il existe un réel m tel que, pour tout entier n : $u_n - m \geqslant 0$.

2°) La suite (u_n) est dite ***majorée*** (ssi) Il existe un réel M tel que, pour tout entier n : $u_n \leqslant M$ (ssi) Il existe un réel M tel que, pour tout entier n : $u_n - M \leqslant 0$.

3°) La suite (u_n) est dite ***bornée*** (ssi) Il existe deux nombres réels m et M tels que : pour tout entier entier n : $m \leqslant u_n \leqslant M$.

Méthodes :

On choisira **LA** méthode la plus adaptée.

1°) ***Méthode algébrique*** : On étudie le signe de la différence $u_n - m$ ou $u_n - M$

<u>Exemple</u> : On considère la suite définie, pour tout entier $n \neq 0$, par : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

Montrer que pour tout entier $n \neq 0$: $1 < u_n \leqslant 2$.

2°) ***Méthode de la fonction associée*** : Si la suite est définie d'une manière explicite par une relation du type $u_n = f(n)$, alors la suite a le même comportement que la fonction sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On peut étudier le sens de variation (calcul de la dérivée) de la fonction et trouver son minimum et son maximum lorsqu'ils existent.

<u>Exemple</u> : le même exercice que ci-dessus avec la 2ème méthode.

3°) ***Méthode par récurrence :*** Si la suite est récurrente et définie par une relation du type $u_{n+1} = g(u_n)$, u_0 étant donné, alors on utilise, en général, un raisonnement par récurrence.

4°) A ***la calculatrice*** : Afficher les 10 ou 20 premières valeurs, déterminer une valeur « limite inférieure » ou une « limite supérieure », puis essayer de démontrer le résultat par l'une des méthodes précédentes.

5°) Écrire ***un algorithme*** : idem.

IV. Étude de suites particulières (1ère S)

4.1) Suites arithmétiques

<u>Définition 1.</u> :

Soit r un nombre réel donné. On dit que (u_n) est une ***suite arithmétique de raison r***, lorsque $u_0 \in \mathbb{R}$ est donné et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + r$.

Comment démontrer qu'une suite est arithmétique ?

Il suffit de calculer et de montrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ = constante.

Cette constante (indépendante de n) est la raison de la suite arithmétique.

Propriétés :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :

(P_1) : Pour tout entier $n \geqslant 0$: $u_n = u_0 + nr$.

(P_2) : Pour tout entier $p \geqslant 0$ et pour tout entier $n \geqslant 0$: $u_n = u_p + (n-p)r$.

(P_3) : Pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout entier $0 \leqslant p \leqslant n$: $u_p + u_{n-p} = u_0 + u_n$.

(P_4) : Si on appelle S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n), c'est-à-dire $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, alors :

$$S_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2} = \frac{nombre\, de\, termes \times (premier + dernier\, terme)}{2}$$

Exemples

1°) Calculer la somme des nombres entiers de 1 à 100, puis de 1 à 1000.

2°) Calculer la somme : S = 7+10+13+16+....+1000.

Théorème :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- La suite (u_n) est croissante si et seulement si : $\boldsymbol{r > 0}$.
- La suite (u_n) est décroissante si et seulement si : $\boldsymbol{r < 0}$.
- La suite (u_n) est constante si et seulement si : $\boldsymbol{r = 0}$.

Dans les trois cas, la *représentation graphique* de la suite est un *nuage de points alignés* sur une droite de coefficient directeur r et d'ordonnée à l'origine u_0.

4.2) Suites géométriques

Définition 2. :

Soit q un nombre réel donné. On dit que (v_n) est une ***suite géométrique de raison q***, lorsque $v_0 \in \mathbb{R}$ est donné et pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = q \times v_n = q\, v_n$.

Comment démontrer qu'une suite est géométrique ?

Il suffit de calculer et de montrer que le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ = constante.

Cette constante (indépendante de n) est la raison de la suite géométrique.

Propriétés :

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q. Alors :

(P_1) : Pour tout entier $n \geqslant 0$: $v_n = v_0 \times q^n$.

(P_2) : Pour tout entier $p \geqslant 0$ et pour tout entier $n \geqslant 0$: $v_n = v_p \times q^{(n-p)}$

(P_3) : Si on appelle S_n la somme des $(n+1)$premiers termes de la suite (u_n), c'est-à-dire $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$, alors :

– si $q = 1$, alors : $S_n = (n+1)v_0$

– si $q \neq 1$, alors : $S_n = \frac{v_0(1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{premier\, terme \times (1-q^{nombre\, de\, termes})}{1-q}$

Théorème :

1°) Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme positif $v_0 > 0$.

- La suite (v_n) est croissante si et seulement si : $q > 1$.
- La suite (v_n) est décroissante si et seulement si : $0 < q < 1$.
- La suite (v_n) est constante si et seulement si : $q = 1$.

Dans les trois cas, la *représentation graphique* de la suite est un nuage de points « *courbe* » d'ordonnée à l'origine v_0.

2°) Si (v_n) une suite géométrique de raison $q < 0$, alors les termes de la suite (v_n) sont alternativement postifs et négatifs, donc la suite n'est ni croissante ni décroissante.

Remarque : Si le premier terme est négatif, $v_0 < 0$, le sens de variation est inversé.

4.3) Suites arithmético-géométriques

Définition

Soient a et b deux nombres réels donnés.
Une ***suite arithmético-géométrique*** (u_n) est définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par *la relation de récurrence* : $u_{n+1} = a\,u_n + b$ pour tout entier n.
On écrit :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \quad est\ donné \\ u_{n+1} = a\,u_n + b \end{cases}$$

La ***fonction associée*** à cette suite arithmético-géométrique est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = a\,x + b$.

Cas particuliers

① Si $a = 0$, alors la suite (u_n) est *constante* et égale à b.

② Si $a = 1$, alors la suite (u_n) est *arithmétique* de raison $r = b$.

③ Si $b = 0$, alors la suite (u_n) est *géométrique* de raison $q = a$.

Exemple (*type BAC classique*) : Étude complète d'une suite arithmético-géométrique.
Voir Fiche-BacS n°1.

Exercices à faire et à refaire....