

Loi binomiale et Calculatrices

Schéma de Bernoulli. Loi binomiale.

Ici il faut faire un (grand) effort de rédaction

On considère une expérience aléatoire à deux issues. L'une qu'on appelle « **Succès** » avec une probabilité p , et l'autre, l'événement contraire noté \bar{S} , qu'on appelle « **Échec** » avec une probabilité $1-p$. C'est une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p égal à la probabilité du succès.

On recommence n fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p de façon indépendante et dans les mêmes conditions – c'est-à-dire **avec remise**. On fait un arbre pondéré et obtient un **schéma de Bernoulli**.

On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès sur les n épreuves.

X prend les valeurs : $0; 1; 2; \dots; n$. On écrit : $X(\Omega) = \{0; 1; 2; \dots; n\}$.

X suit une **loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres n et p .

La loi de probabilité de X est donnée par :

Valeurs de k	0	1	2	...	n
$p_k = P(X = k)$	$P(X = 0)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$...	$P(X = n)$

Toutes ces valeurs sont données par les calculatrices avec les instructions **Binompdf** ou **Bpd** ou **Binomial pdf** ou encore **Binomiale DdP** ... voir ci-dessous.

On sait que pour tout $k = 0; 1; 2; \dots; n$, la probabilité d'obtenir **k succès** est donnée par la formule : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \times (1-p)^{n-k}$ où $\binom{n}{k}$ désigne le **coefficient binomial** « **k parmi n** », c'est-à-dire **le nombre de chemins** qui aboutissent à **k succès**.

Remarques

1°) La probabilité « **pour obtenir au plus k succès** » = $P(X \leq k)$, c'est une « **probabilité cumulée croissante** », c'est-à-dire :

$$P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = k) = \sum_{i=0}^k P(X = i)$$

Cette valeur est aussi donnée par les calculatrices avec **Binomcdf** ou **Bcd** ou **Binomial Cdf** ou encore **Binomiale FdR** ... voir ci-dessous.

2°) La probabilité « **pour obtenir au moins k succès** » = $P(X \geq k)$, c'est aussi une « **probabilité cumulée décroissante** », c'est-à-dire :

$$P(X \geq k) = P(X = k) + P(X = k + 1) + \dots + P(X = n) = \sum_{i=k}^n P(X = i)$$

Attention !!!

Ces valeurs cumulées décroissantes *ne sont pas* données par les calculatrices. Cependant, si on veut utiliser les calculatrices, on peut utiliser l'événement contraire :

Donc :

$$P(X \geq k) = 1 - P(X < k) = 1 - P(X \leq k - 1)$$

Attention aux symboles « inférieur » et « inférieur ou égal ».


Utilisation de la calculatrice

Exemples : Nous choisissons ici une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$.


Calcul des coefficients binomiaux $\mathcal{B}(10 ; 0.3)$.

<i>Casio : Graph 35+ et modèles sup.</i>	<i>Texas : TI82 Stats et modèles sup.</i>
<p><u>Calcul des coefficients binomiaux</u> Dans le Menu RUN, appuyer sur la touche OPTN, puis choisir PROB.</p> <p>Pour calculer $\binom{10}{3}$, taper 10, puis choisir nCr, puis taper 3 et EXE.</p>	<p><u>Calcul des coefficients binomiaux</u> Pour calculer $\binom{10}{3}$, taper 10, puis appuyer sur la touche MATH, choisir le menu PRB, puis choisir nCr ou Combinaison (version fr), puis taper 3 et ENTER.</p>

Loi de probabilité d'une loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0.3)$.

<i>Casio : Graph 35+ et modèles sup.</i>	<i>Texas : TI82 Stats et modèles sup.</i>
<p><u>Calcul des probabilités $P(X=k)$</u> Menu ► STAT ► DIST ► BINM ► BPD <u>Pour calculer $P(X=2)$</u> Binomial P.D. Data : Variable Choisir ici « Variable » x : 2 Placer ici la valeur de k Numtrial : 10 Placer ici la valeur de n P : 0.3 Placer ici la valeur de p Save Res : None Execute CALC Pour calculer, appuyer sur F1 Après exécution on obtient : Binomial P.D P=0.23347444</p>	<p><u>Calcul des probabilités $P(X=k)$</u> Menu ► 2nd DISTR (ou ► Distrib)  <u>Pour calculer $P(X=2)$</u> Menu ► 2nd DISTR ► Binompdf ou ► BinomFdp (version fr) Compléter les paramètres : n, p, k Binompdf(10,0.3, 2) Après exécution on obtient : 0.2334744405</p>

Proba cumulées ou Fonction de répartition d'une loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0.3)$.

Casio : Graph 35+ et modèles sup.	Texas : TI82 Stats et modèles sup.
<p>Calcul des proba. cumulées $P(X \leq k)$ Menu ► STAT ► DIST ► BINM ► BCD</p> <p>Pour calculer $P(X \leq 7)$ Binomial C.D. (C pour Cumulées) Data : Variable Choisir ici « Variable » x : 7 Placer ici la valeur de k Numtrial : 10 Placer ici la valeur de n P : 0.3 Placer ici la valeur de p Save Res : None Execute CALC Pour calculer, appuyer sur F1</p> <p>Après exécution on obtient :</p> <p style="text-align: center;">Binomial C.D P=0.99840961</p>	<p>Calcul des proba. cumulées $P(X \leq k)$ Menu ► 2nd DISTR (► Distrib)</p>  <p>Pour calculer $P(X \leq 7)$ Menu ► 2nd DISTR ► Binomcdf ou ► BinomFrép (version fr) Compléter les paramètres : n, p, k Binomcdf(10,0.3,7) Après exécution on obtient : .9984096136</p>

Autre méthode sur TI82 Stats et modèles sup. Très pratique !

(je ne connais pas la procédure équivalente sur Casio! Si vous connaissez, écrivez-moi) :

Aller dans ► **f(x) =** ou ► **Y =** et rentrer directement les fonctions

Y1 = ► 2nde Distrib **Binompdf(n,p,X)** pdf ou **fdp** comme fct de distribution de proba.

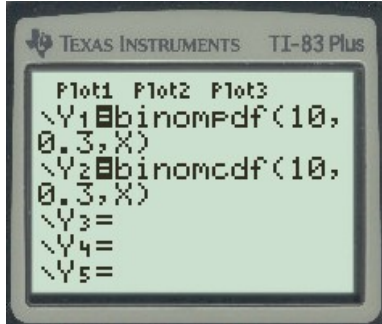
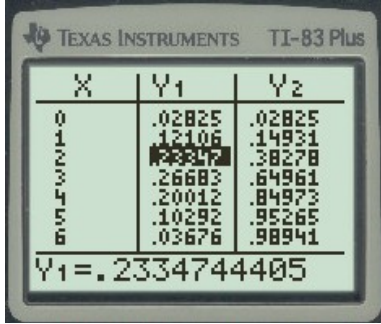
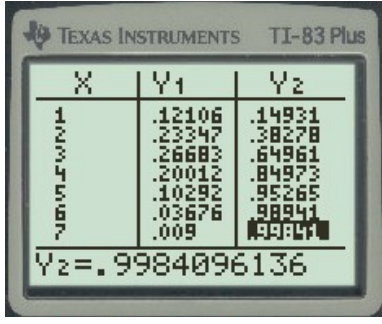
Y2 = ► 2nde Distrib **Binomcdf(n,p,X)** cdf ou **fdc** comme fct de distribution cumulée,...

ou

Y1 = Binomfdp(n,p,X) et

Y2 = ► 2nde Distrib **BinomFrép(n,p,X)** (version fr) avec les valeurs exactes de n et p . Puis

► 2nde **TABLE** pour afficher le tableau de valeurs.

 <p>Y1 et Y2 rentrées</p>	 <p>$P(X=2)=0,2334744405$</p>	 <p>$P(X \leq 7)=0,9984096136$</p>
---	--	---

Attention ! Si la machine affiche **ERROR** dans Y1, il faut aller dans ► 2nde **TableSet** ou ► 2nde **Déf Table** pour redéfinir le pas : commencer à 0 et définir un pas égal à 1.

X	Y1	Y2
0	.02825	.02825
.5	ERROR	.02825
1	.12106	.14931
1.5	ERROR	.14931

.../...

1°) Calcul des coefficients binomiaux : nCr

Menu ► **2nd MATH** ► **Probabilités** ► **nbrComb()**

nbrComb(n,k) ENTRER

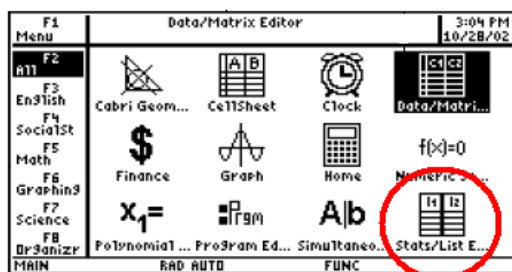
Exemple : nbrComb(6,2) puis **ENTRER** donne **15**

Sur les TI-89 Titanium & Voyage 200

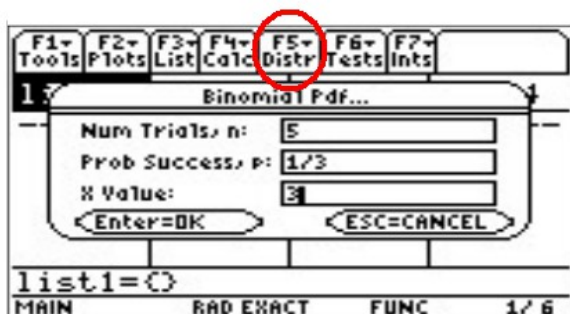
2°) Calcul des probabilités $P(X=k)$

Comment calculer les probabilités d'obtenir « **exactement k succès** » pour une loi binomiale sur une TI-89 Titanium ou une Voyage 200 ?

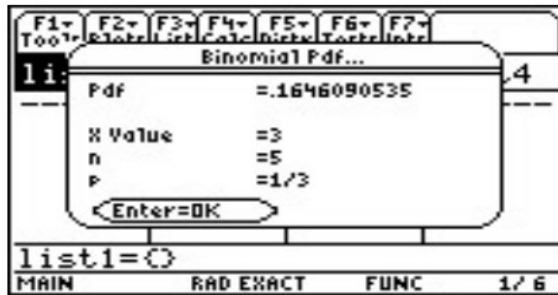
- Choisir dans le **Bureau Apps (menu d'accueil)** de la calculatrice : **Stats/Edits** ou **Stats/List Edits...**



- Puis **F5** pour obtenir toutes les distributions **DISTR** :



- Sélectionner **B: Binomial Pdf** ou **B: Binomiale DdP** (version fr)
- Puis Compléter les paramètres :
 - **Num Trials, n:** = valeur de n . Par ex. : $n = 5$
 - **Prob Succès, p:** = valeur de p . Par ex. : $p = 1/3$
 - **x Value:** = valeur de k . Par ex. : $k = 3$
- puis **ENTRER**
- On obtient après exécution : **$P(X=3) = \text{pdf} = 0.1646090535$**

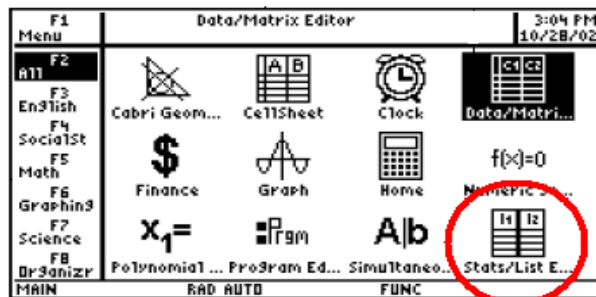


Sur les TI-89 Titanium & Voyage 200

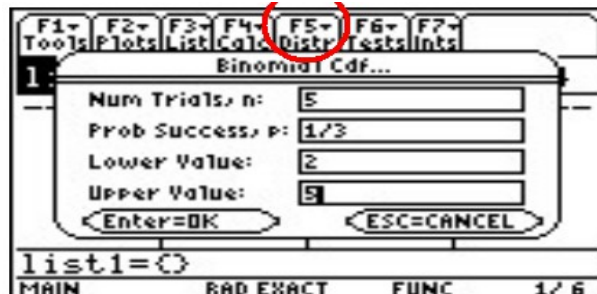
3°) Calcul des probabilités $P(X \leq k)$

Comment calculer les probabilités cumulées d'obtenir « au plus k succès » pour une loi binomiale sur une TI-89 Titanium ou une Voyage 200 ?

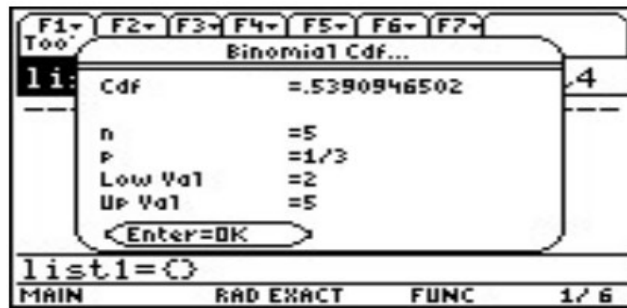
- Choisir dans le **Bureau Apps (menu d'accueil)** de la calculatrice : **Stats/Edits** ou **Stats/List Edits...**



- Puis **F5** pour obtenir toutes les distributions **DISTR** :



- Sélectionner **C: Binomial Cdf** ou **C: Binomiale Fdr** (version fr)
Puis Compléter les paramètres :
 - **Num Trials, n:** = valeur de n . Par ex. : $n = 5$
 - **Prob Succès, p:** = valeur de p . Par ex. : $p = 1/3$
 - **Lower Value:** = valeur minimale de k . Par ex. : $k = 2$
 - **Upper Value:** = valeur maximale de k . Par ex. : $k = 5$
- puis **ENTRER**
- On obtient après exécution : $P(2 \leq X \leq 5) = \text{Cdf} = .5390946502$



- Pour calculer $P(X \leq 5) = P(0 \leq X \leq 5)$, il suffit de choisir la valeur minimale = 0.