Fonctions exponentielles

Cette fiche sera complétée au fur et à mesure

Exercice n°1. BAC ES 2000. [RÉSOLU]

Le graphique donné en annexe est celui de la courbe représentative Γ (*lire gamma*) d'une fonction f définie sur [0 ;4] et de ses tangentes aux points d'abscisses 1 et $\frac{3}{2}$.

1°) Lire graphiquement $f(1)$, $f'(1)$ et $f'\left(\frac{3}{2}\right)$.

2°) Parmi les trois courbes données en annexe, laquelle est susceptible de représenter la fonction dérivée f' de f ? Justifier votre réponse à l'aide d'arguments graphiques.

3°) On admet que l'expression de la fonction f s'écrit $f(x)=(ax+b)e^{-x+1}$, où a et b sont des nombres réels à déterminer.

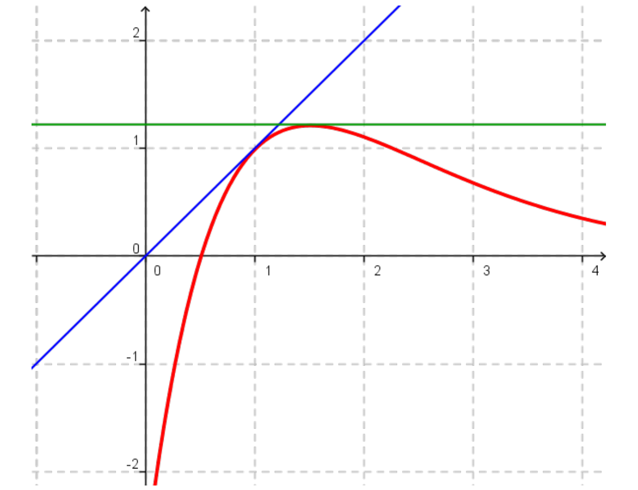
a) Calculer la dérivée f' de f.

b) En utilisant les données de la question 1, déterminer les valeurs de a et de b.

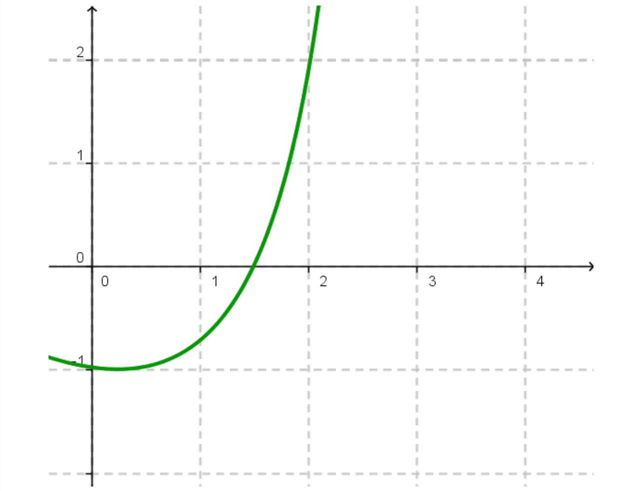
c) Étudier le sens de variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

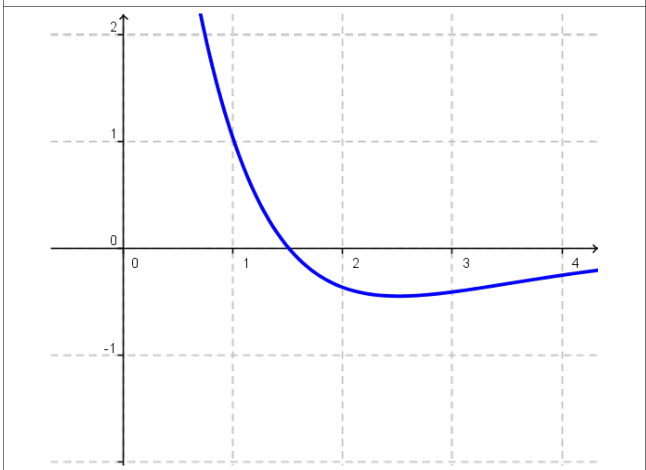
ANNEXES



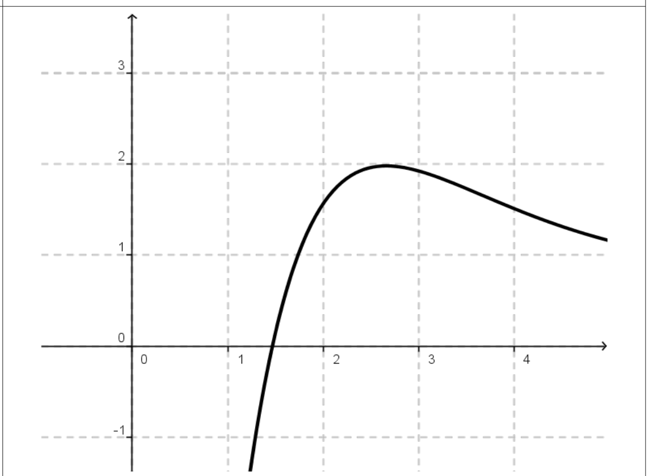
Courbe Γ *de* f



Courbe C_1



Courbe C_2



Courbe C_3

Corrigé

1°) Lire graphiquement $f(1)$, $f'(1)$ et $f'\left(\frac{3}{2}\right)$.

- La courbe passe par le point de coordonnées A (1;1) donc $f(1) = 1$.
- La tangente T_1 à la courbe Γ en ce point passe par l'origine O(0;0) et par A (1;1) donc son coefficient directeur est $f'(1)=m_1=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1-0}{1-0}=1$ donc $f'(1) = 1$.
- La tangente $T_{1,5}$ à la courbe Γ au point d'abscisse $\frac{3}{2}$ es parallèle à l'axe des abscisses [horizontale], donc son coefficient directeur est nul. Donc : $f'\left(\frac{3}{2}\right)=0$.

2°) Parmi les trois courbes données en annexe, laquelle est susceptible de représenter la fonction dérivée f' de f ? Justifier votre réponse à l'aide d'arguments graphiques.

La courbe de f' doit passer par les points de coordonnées A (1;1) et (1,5 ;0). Seule la courbe n°2 remplit ces deux conditions. Donc $C_{f'} = C_2$.

3.a) Calculer la dérivée f' de f.

f est un produit de deux fonctions : $f(x)=u(x)\times v(x)$, avec
$u(x)=ax+b \quad \rightarrow \quad u'(x)=a$
et $v(x)=e^{-x+1} \quad \rightarrow \quad v'(x)=-1e^{-x+1}$
Donc $f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$
$f'(x)=a\times e^{-x+1}+(ax+b)\times(-1e^{-x+1})$
$f'(x)=a\times e^{-x+1}-(ax+b)\times e^{-x+1}$
On met e^{-x+1} en facteur (à droite). Ce qui donne :
$f'(x)=(a-ax-b)\times e^{-x+1}$
<u>Conclusion</u> : por tout $x\in[0;4]$ $f'(x)=(-ax+a-b)e^{-x+1}$

3.b) En utilisant les données de la question 1, déterminer les valeurs de a et de b.

On sait que : $f'(1) = 1$, donc $(-a\times 1+a-b)e^{-1+1}=1$, donc $-be^0=1$.
On obtient une première équation :

$$\boxed{-b = 1 \qquad (1)}$$

D'autre part, $f'\left(\frac{3}{2}\right)=0$ donc $(-a\times 1{,}5+a-b)e^{-1{,}5+1}=0$ donc $(-0{,}5a-b)e^{-0{,}5}=0$. Or, pour tout nombre réel x : $e^x > 0$, donc $e^{-0,5} > 0$, donc différent de 0. On obtient une deuxième équation :

$$\boxed{-0{,}5a-b=0 \qquad (2)}$$

On obtient ainsi le système de 2 équations à deux inconnues :
$\begin{cases} -b=1 \\ -0{,}5a-b=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} b=-1 \\ -0{,}5a-(-1)=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} b=-1 \\ -0{,}5a=-1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} b=-1 \\ a=2 \end{cases}$

<u>Conclusion</u> : La fonction f est définie par : $f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$

3.c) Étudier le sens de variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

D'après la question 3.a) on a $f'(x)=(-ax+a-b)e^{-x+1}$ avec a = 2 et b = –1.
Donc, pour tout $x\in[0;4]$: $f'(x)=(-2x+2-(-1))e^{-x+1}$
Par conséquent : $f'(x)=(-2x+3)e^{-x+1}$

Étude du signe de $f'(x)$.
$f'(x)=0$ ssi $(-2x+3)e^{-x+1}=0$
ssi $(-2x+3)=0$ ou $e^{-x+1}=0$
Or, pour tout nombre réel x : $e^x>0$, donc $e^{-0,5}>0$, donc différent de 0. Donc,
$f'(x)=0$ ssi $-2x+3=0$ ssi $x=\dfrac{3}{2}$
De même :
$f'(x)>0$ ssi $(-2x+3)e^{-x+1}>0$
Or, pour tout réel x : $e^x>0$. Donc, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $-2x+3$.
Donc $f'(x)>0$ ssi $x<\dfrac{3}{2}$ [donc $f'(x)<0$ de l'autre côté].
On obtient le TV de la fonction sur [0;4] :

x	0		3/2		4
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$		↗	$f(3/2)$ à calculer	↘	
	$f(0)$ à calculer				$f(4)$ à calculer

3.d) Résoudre l'équation $f(x)=0$.
$f(x)=0$ ssi $(2x-1)e^{-x+1}=0$
ssi $(2x-1)=0$ ou $e^{-x+1}=0$
Or, pour tout nombre réel x : $e^x>0$, donc $e^{-0,5}>0$, donc différent de 0. Donc,
$f(x)=0$ ssi $2x-1=0$ ssi $x=\dfrac{1}{2}$
<u>Conclusion</u> : Cette équation admet une seule solution sur [0;4]. Donc

$$S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$$