Probabilités continues et Lois normales

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Notion de loi à densité **à partir d'exemples** Loi à densité sur un intervalle.		Les exemples étudiés s'appuient sur une expérience aléatoire et un univers associé Ω, muni d'une probabilité. On définit alors une variable aléatoire X, fonction de Ω dans **R**, qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de **R**. On admet que X satisfait aux conditions qui permettent de définir la probabilité de l'événement $\{X \in J\}$ comme aire du domaine : $\{M(x, y) \,;\, x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ où f désigne la fonction de densité de la loi et J un intervalle inclus dans I. Toute théorie générale des lois à densité et des intégrales sur un intervalle non borné est exclue.
Loi uniforme sur [*a*, *b*]. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme.	Connaître la fonction de densité de la loi uniforme sur $[a, b]$.	L'instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou d'une calculatrice permet d'introduire la loi uniforme sur [0,1]. La notion d'espérance d'une variable aléatoire à densité sur $[a;b]$ est introduite à cette occasion par : $\int_a^b t\,f(t)\,dt$. On note que cette définition constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.
2ème partie ✔ **Loi normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0,1)$.	Connaître la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et sa représentation graphique. Connaître une valeur approchée de la probabilité de l'événement $\{X \in [-1{,}96 ; 1{,}96]\}$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.	Pour introduire la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, on s'appuie sur l'observation des représentations graphiques de la loi de la variable aléatoire $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ où X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et cela pour de grandes valeurs de n et une valeur de p fixée entre 0 et 1. À ce propos, on peut faire référence aux travaux de Moivre et de Laplace en les situant dans une perspective historique.
2ème partie ✔ **Loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$** d'espérance μ et d'écart-type σ.	Utiliser une calculatrice ou un tableur pour obtenir une probabilité dans le cadre d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Connaître une valeur approchée de la probabilité des événements suivants : $\{X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]\}$, $\{X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]\}$ et $\{X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]\}$, lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.	Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ si $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On se limite à une approche intuitive de la notion d'espérance. On exploite les outils logiciels pour faire percevoir l'information apportée par la valeur de l'écart-type. La connaissance d'une expression algébrique de la fonction de densité de cette loi n'est pas un attendu du programme. On illustre ces notions par des exemples issus des sciences économiques ou des sciences humaines et sociales.

III. Loi normale centrée réduite

3.1) Activité

Si X est une variable aléatoire donnée, d'espérance $E(X) = m$. Alors la variable aléatoire définie par $Y = X - m$, a une espérance nulle $E(Y) = m - m = 0$. On dit que Y est la *variable aléatoire* ***centrée*** *associée à X*. En effet, lorsqu'on soustrait la valeur moyenne à toutes les valeurs d'une série statistique, on obtient une moyenne égale à 0.

D'autre part,
Si X est une variable aléatoire donnée, de variance $V(X) = \sigma^2$. Alors la variable aléatoire définie par $Z = X/\sigma$, a une variance $V(Z) = V(X)/\sigma^2 = 1$.

On dit que Z est la *variable aléatoire* ***réduite*** *associée à* X. En effet, lorsqu'on divise toutes les valeurs par l'écart-type, on obtient un écart-type égal à 1.

Rappel :

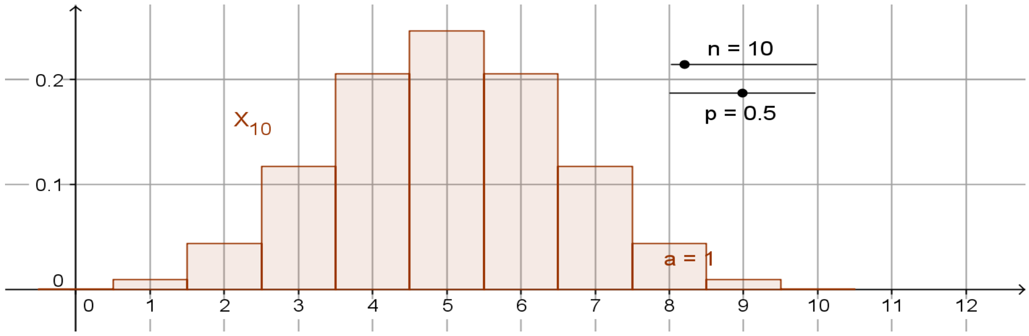
Soit X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors, l'espérance, la variance et l'écart-type de X sont donnés par :

$$m = E(X) = np\,,$$

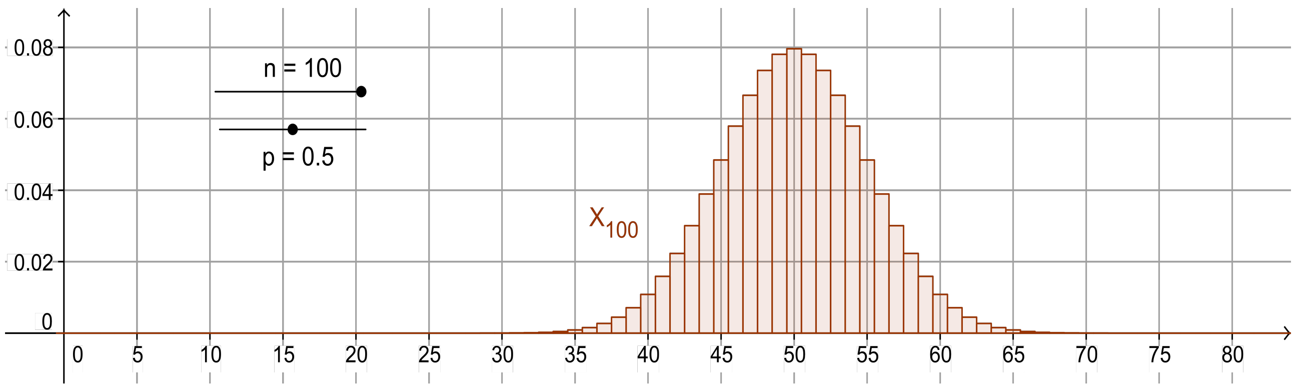
$$V(X) = \sigma^2 = np(1-p)$$

$$\text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$$

Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.



Représentation graphique de X_{10} pour n = 10 et p = 0,5 donc $E(X_{10})$ = 5 et σ=1,581..



Représentation graphique de X_{100} pour n = 100 et p = 0,5 donc $E(X_{100})$ = 50 et σ=5.

On définit une nouvelle variable aléatoire Z_n de la manière suivante :

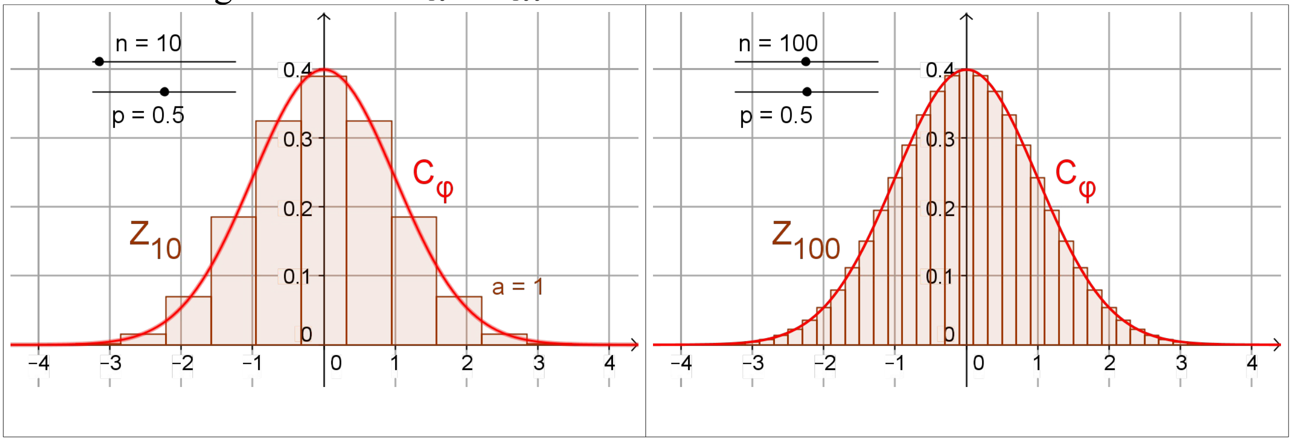
$$Z_n = \frac{X_n - m}{\sigma} = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Z_n est une variable aléatoire ***centrée réduite*** : $E(Z_n) = 0$ et $\sigma(Z_n) = 1$.

Lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes et p fixé (ici p =0,5), le mathématicien français Abraham de Moivre a montré que les histogrammes représentant la loi de Z_n se rapprochent de la courbe d'une fonction φ (lire "phi") définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Voici les histogrammes de Z_{10} et Z_{100}.



On peut dire alors que lorsque *n* prend des valeurs de plus en plus grandes (*n* tend vers $+\infty$) et *p* fixé, alors la variable aléatoire Z_n peut être approchée par une ***variable aléatoire continue*** ayant pour ***fonction densité la fonction*** **φ** définie ci-dessus.

3.2) La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

a) Définition.

Une variable aléatoire *Z* suit ***la loi normale centrée réduite***, notée $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque *Z* admet pour fonction densité la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

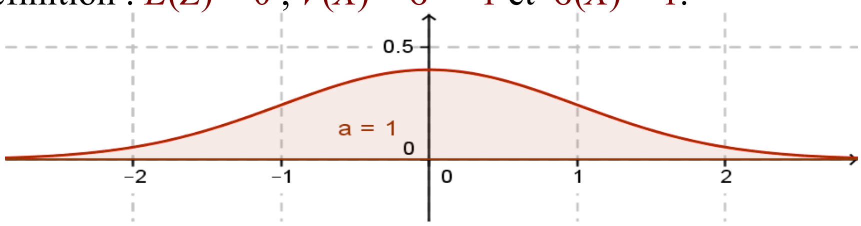
b) Propriétés.

P1) φ est une fonction *continue* et *positive* sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$.

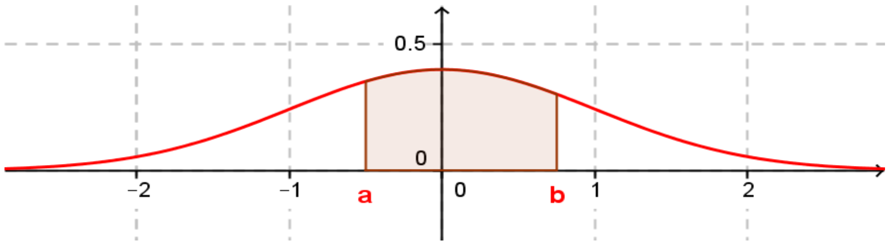
L'aire totale du domaine compris entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 1.

Donc φ est bien une fonction de densité de probabilité.

Par définition : $E(Z)=0$, $V(X)=\sigma^2=1$ et $\sigma(X)=1$.



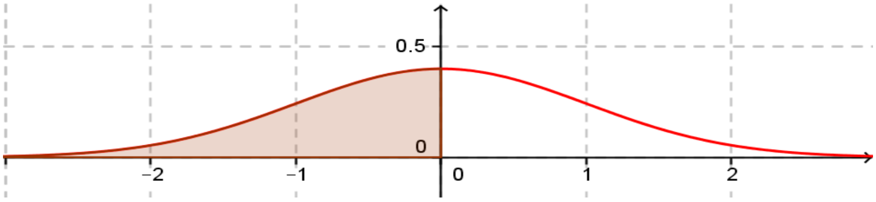
P2) Pour tous nombres réels a et b, tels que $a\leqslant b$: $P(a\leqslant Z\leqslant b)=\int_a^b\varphi(x)dx$



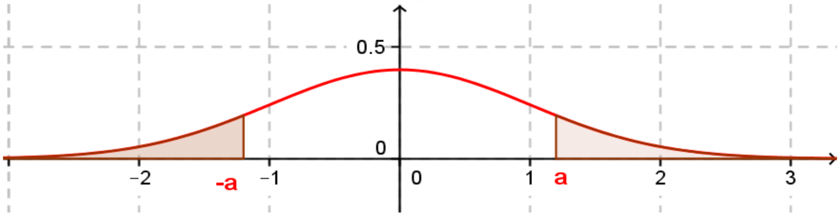
Et d'après les propriétés d'une fonction de densité de probabilités, on a :

$$P(a\leqslant Z\leqslant b)=P(a\leqslant Z<b)=P(a<Z\leqslant b)=P(a<Z<b)$$

P3) La fonction φ est paire donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Donc : $P(Z\leqslant 0)=P(Z\geqslant 0)=\frac{1}{2}$



P4) Pour tout nombre réel a, on a par symétrie : $P(Z\leqslant -a)=P(Z\geqslant a)$



P5) Valeurs de référence :

$$P(-1\leqslant Z\leqslant 1)=0{,}683 \;=68{,}3\%$$
$$P(-2\leqslant Z\leqslant 2)=0{,}955 \;=95{,}5\%$$
$$P(-3\leqslant Z\leqslant 3)=0{,}997 \;=99{,}7\%$$

***c*)** Calcul des probabilités à la calculatrice : Loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ ou $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$:

Casio : Graph 35+ et modèles sup.	***Texas : TI82 Stats et modèles sup.***
Calcul des probabilités ***P*(– 0,5 < *Z*< 1,2)** Menu▶ **STAT**▶**DIST**▶ **NORM**▶ **NCD** **Pour calculer** ***P*(– 0,5 < *Z* < 1,2)** DC normale (ou normal C.D) Data : Variable Lower : -0.5 Upper : 1.2 σ : 1 μ : 0 Save Res :None Execute CALC Pour calculer, appuyer sur F1 Après exécution on obtient : DC normale P= 0.57639274 z:Low=-0.5 z:Up = 1.2	**Calcul des probabilités** ***P*(– 0,5 < *Z*< 1,2)** Menu▶ **2nd DISTR** (ou ▶ **Distrib**)  **Pour calculer** ***P*(– 0,5< *Z*<1,2)** Menu ▶ **2nd DISTR** ▶ **normalcdf** ou ▶ **normalFrép** (version fr) Compléter les paramètres : ***a*, *b* , μ , σ** normalcdf(-0.5,1.2,0,1) Après exécution on obtient : 0.5763927362

Remarques :
Les calculatrices ne fournissent pas $P(X<b)=P(X\leqslant b)$ mais seulement $P(a\leqslant X\leqslant b)$.
Pour le calcul de $P(X<b)=P(X\leqslant b)$ dans le cas où X suit une loi N(μ,σ^2), la méthode rigoureuse pratiquée est donc la suivante (faites une figure pour le voir !) : très important !!

- Si $b>\mu$, on utilise : $P(X<b)=0{,}5+P(\mu\leqslant X\leqslant b)$;
- Si $b<\mu$, on utilise : $P(X<b)=0{,}5-P(b\leqslant X\leqslant\mu)$.

Cependant, comme la fonction exp($-x^2$) tend vers 0 *très rapidement* lorque x tend vers l'infini, on peut calculer $P(X<b)=P(X\leqslant b)$ en écrivant sur une calculatrice les valeurs : a = -10^{99} et b.
Ce qui donne : $P(X<b)=P(-10^{99}<X<b)$ ou simplement $P(X<a)\approx P(-100<X<a)$
(inutile d'aller plus loin pour la précision que nous cherchons en général !)

IV. Loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

4.1) Définition

Une variable aléatoire X suit une ***loi normale*** $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ si la variable aléatoire $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

4.2) Espérance et écart-type

Si une v.a. X suit une ***loi normale*** $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, alors $E(X)=\mu$, $V(X)=\sigma^2$ et $\sigma=\sqrt{V(X)}$

Attention !
Lorsqu'on écrit "X suit la loi $\mathcal{N}(40;5)$", cela signifie que la valeur moyenne de X est bien $E(X)=40$, alors que 5 désigne la variance de X, donc l'écart-type est $\sigma=\sqrt{5}$.
Attention, dans certains ouvrages (anciens), on note $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ au lieu de $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

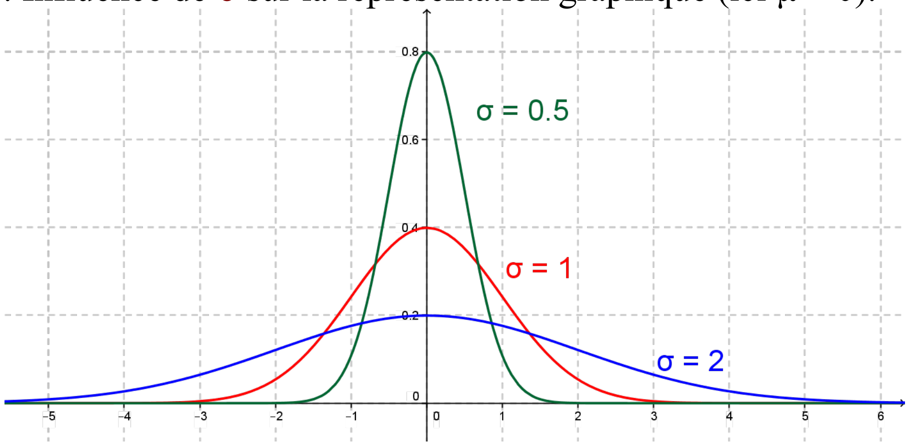
Exemple (Extrait des documents ressources) :
La masse en kg des nouveaux nés à la naissance est une variable aléatoire qui peut être modélisée par une loi normale de moyenne $\mu=3{,}3$ *et d'écart-type* $\sigma=0{,}5$. *Calculer la probabilité qu'un nouveau né pèse moins de* 2,5 kg *à la naissance.*

La probabilité qu'un nouveau né pèse moins de 2,5 kg à la naissance est donc : P(X< 2,5).
La variable $Z=\dfrac{X-3{,}3}{0{,}5}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
On a alors : $P(X<2{,}5)=P(X-3{,}3<2{,}5-3{,}3)=P\left(\dfrac{X-3{,}3}{0{,}5}<\dfrac{2{,}5-3{,}3}{0{,}5}\right)$
Ce qui donne : $P(X<2{,}5)=P(Z<-1{,}6)=1-P(Z<1{,}6)\approx 0{,}055$.
La probabilité cherchée est donc égale à 0,055 à 10^{-3} près.
On peut aussi obtenir directement la valeur de P(X < 2,5) à la calculatrice.

4.3) Courbe de la fonction de densité de probabilité

Soit X une v.a.continue qui suit une ***loi normale*** $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, alors :
1°) La courbe représentative C_f de sa fonction f de densité de probabilité admet la doite d'équation "$x=\mu$" pour axe de symétrie ;
2°) La courbe représentative C_f est "pointue" si $0<\sigma<1$ et C_f est "étalée" si $\sigma>1$.

Illustration : Influence de σ sur la représentation graphique (ici μ = 0).

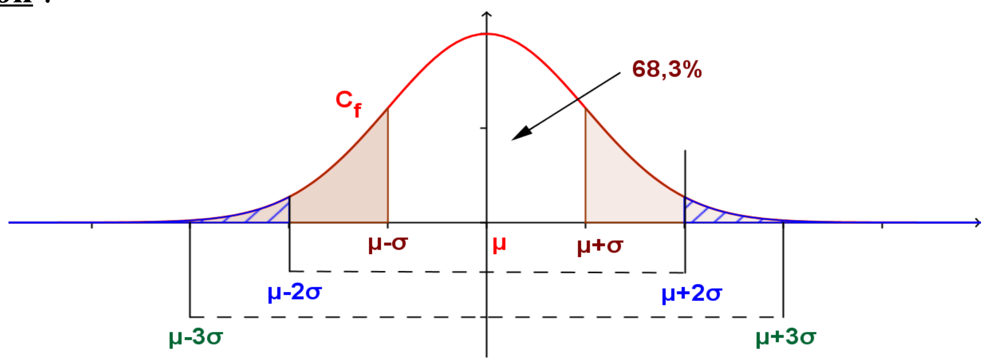


4.4) Les intervalles « Un, deux, trois sigmas »

Les résultats suivants sont utilisés dans de nombreuses situations.

$$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=0{,}683 \quad =68{,}3\%$$
$$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)=0{,}955 \quad =95{,}5\%$$
$$P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)=0{,}997 \quad =99{,}7\%$$

Illustration :



4.5) Déterminer *t* connaissant la valeur de P(X< t)

Exemple : Soit X une v.a. continue qui suit une loi normale $\mathcal{N}(10;\,0{,}8^2)$. Déterminer une valeur approchée de t au centième près telle que 1°) $P(X\leqslant t)=0{,}95$ et 2°) $P(X\geqslant t)=0{,}85$.

C'est le calcul inverse.

1°) Pour déterminer t telle que : $P(X\leqslant t)=0{,}95$ on utilise les instructions inverses sur la calculatrice.

<table>
<tr><th>Casio : Graph 35+ et modèles sup.</th><th>Texas : TI82 Stats et modèles sup.</th></tr>
<tr><td>Menu▶ STAT▶DIST▶ NORM▶ F3 invN
Pour calculer t tel que P(X < t) = 0,95
Normal inverse
Data : Variable
Tail : Left
Area : 0,95
σ : 10
μ : 0,8</td><td>Pour calculer t tel que P(X < t) = 0,95
Menu▶ 2nd DISTR (ou ▶ Distrib)

</td></tr>
</table>

Save Res :None Execute CALC Pour calculer, appuyer sur F1 Après exécution on obtient : Normal inverse xInv=11,3158829	**Pour calculer** $P(X < t) = p$ Menu ▶ 2nd DISTR ▶ invNorm ou ▶ FracNormale (version fr) Compléter les paramètres : p, μ, σ FracNormale(0.95,10,0.8) Après exécution on obtient : 11,3158829

Conclusion : Une valeur approchée de t telle que $P(X \leqslant t) = 0{,}95$ est $t \approx 11{,}32$ au centième près.

2°) Pour déterminer une valeur approchée de t telle que $P(X \geqslant t) = 0{,}85$,

- sur **Casio**, il suffit de remplacer "Left" par "Right". On obtient directement $t \approx 9{,}17$.
- Sur **Texas** : On fait une petite transformation :
  $P(X \leqslant t) = 1 - P(X \geqslant t) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$
  Avec la procédure ci-dessus, on cherche t telle que $P(X \leqslant t) = 0{,}15$ et on obtient : $t \approx 9{,}17$.

OUF !