Probabilités continues et lois à densité

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Notion de loi à densité **à partir d'exemples** Loi à densité sur un intervalle.		Les exemples étudiés s'appuient sur une expérience aléatoire et un univers associé Ω, muni d'une probabilité. On définit alors une variable aléatoire X, fonction de Ω dans **R**, qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de **R**. On admet que X satisfait aux conditions qui permettent de définir la probabilité de l'événement $\{X \in J\}$ comme aire du domaine : $\{M(x, y) \; ; x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ où f désigne la fonction de densité de la loi et J un intervalle inclus dans I. Toute théorie générale des lois à densité et des intégrales sur un intervalle non borné est exclue.
Loi uniforme sur [*a*, *b*]. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme.	Connaître la fonction de densité de la loi uniforme sur [a, b].	L'instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou d'une calculatrice permet d'introduire la loi uniforme sur [0,1]. La notion d'espérance d'une variable aléatoire à densité sur [$a;b$] est introduite à cette occasion par : $\int_a^b t\,f(t)\,dt$. On note que cette définition constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.
Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.	Connaître la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et sa représentation graphique. Connaître une valeur approchée de la probabilité de l'événement $\{X \in [-1{,}96;1{,}96]\}$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.	Pour introduire la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, on s'appuie sur l'observation des représentations graphiques de la loi de la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ où X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et cela pour de grandes valeurs de n et une valeur de p fixée entre 0 et 1. À ce propos, on peut faire référence aux travaux de Moivre et de Laplace en les situant dans une perspective historique.
Loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ d'espérance μ et d'écart-type σ.	Utiliser une calculatrice ou un tableur pour obtenir une probabilité dans le cadre d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Connaître une valeur approchée de la probabilité des événements suivants : $\{X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]\}$, $\{X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]\}$ et $\{X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]\}$, lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.	Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ si $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On se limite à une approche intuitive de la notion d'espérance. On exploite les outils logiciels pour faire percevoir l'information apportée par la valeur de l'écart-type. La connaissance d'une expression algébrique de la fonction de densité de cette loi n'est pas un attendu du programme. On illustre ces notions par des exemples issus des sciences économiques ou des sciences humaines et sociales.

I. Variable aléatoire continue

1.1) Rappels sur les v.a. discrètes

On considère une expérience aléatoire et Ω l'univers (fini) associé, muni d'une probabilité. On appelle variable aléatoire discrète X, toute fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, X prend un nombre fini de valeurs.

Ici, comme Ω est fini, l'ensemble des valeurs prises par X est évidemment fini.

On pose $X(\Omega)=\{x_1 \,;\, x_1 \,;\, \ldots \,;\, x_n\}$. On note "$X = x_k$" l'événement formé de toutes les issues ω de Ω qui réalisent X(ω)= x_k. On note en général p_k= P($X = x_k$), la probabilité de l'événement "$X = x_k$". Alors :

- ***La loi de probabilité de la v.a. X***, est définie par la donnée des probabilités de tous les événements "$X = x_k$", notées p_k. On présente (souvent) cette loi dans un tableau comme suit

Valeurs x_k	x_1	x_2	...	x_n
$p_k = P(X = x_k)$	p_1	p_2	...	p_n

- ***L'espérance mathématique de X***, notée $E(X)$, désigne la moyenne des valeurs prises par X, et pondérées par leurs probabilités de réalisation :

$$E(X)=p_1 x_1+p_2 x_2+\cdots+p_n x_n$$

  qu'on note aussi avec le signe Σ = "Somme" : $E(X)=\sum_{k=1}^{k=n} p_k x_k$

- ***La variance de X***, notée $V(X)$, désigne la moyenne des carrés des écarts à la moyenne de X. Autrement dit, en posant $m = E(X)$.

$$V(X)=E\left[(X-E(X))^2\right]=\sum_{k=1}^{k=n} p_k (x_k-m)^2 \quad .$$

  La variance est *le carré d'une distance* donc, c'est ***un nombre positif ou nul***.

  Théorème : $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ ou encore $V(X)=\left(\sum_{k=1}^{k=n} p_k x_k^2\right)-m^2$

  La variance $V(X)$ permet de caractériser la dispersion des valeurs x_k par rapport à la moyenne $E(X)$.

- ***L'écart-type de X***, noté σ (lire "*sigma*") ou σ(X) ou parfois σ_X, est égal à la racine carrée de la variance : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ ou $\sigma^2(X)=V(X)$ ou simplement $\sigma^2=V$.

  Comme la variance, l'écart-type permet de caractériser la dispersion des valeurs x_k par rapport à la moyenne $E(X)$.
  Une différence d'utilisation entre σ et $V = \sigma^2$, est que σ est *de même dimension que les valeurs* x_k, donc les valeurs x_k peuvent être directement comparées à σ.

1.2) Variables aléatoires continues

Dans toute la suite, on considère une expérience aléatoire et Ω l'univers associé (non nécessairement fini), muni d'une probabilité.

Définition 1.

On appelle variable aléatoire X, toute fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$.

Exemples :

1°) La variable aléatoire X égale à la durée de vie (âge au décès) d'une personne dans une ville donnée ou dans un pays donné, est une v.a. continue.

2°) Le poids à la naissance d'un bébé, exprimé en kg, , est une v.a. continue.

3°) La variable aléatoire X égale à la durée de fonctionnement d'une ampoule électrique exprimée en heures, est une v.a. continue.

4°) La variable aléatoire X égale à la durée de communication téléphonique, exprimée en heures, d'un jeune de 16 à 25 ans, est une v.a. continue.

5°) L'instruction ALEA() sur un tableur ou RAND# ou nbrAleat() sur une calculatrice, donnent un nombre au hasard compris entre 0 et 1. Ces instructions définissent une v.a. continue X prenant ses valeurs dans [0;1]. Toutes ces valeurs "peuvent" être prises.

1.3) Fonction de densité de probabilité sur un intervalle

Définition 2.

On appelle ***fonction de densité de probabilité*** ou *fonction de densité* ou encore *densité de probabilité* sur un intervalle I, toute fonction f, continue et positive sur $[a; b]$ et dont l'intégrale entre a et b est égale à 1.

Autrement dit : f est une ***densité de probabilité*** sur l'intervalle $[a; b]$ lorsque :

1°) $f \geqslant 0$ sur I ;

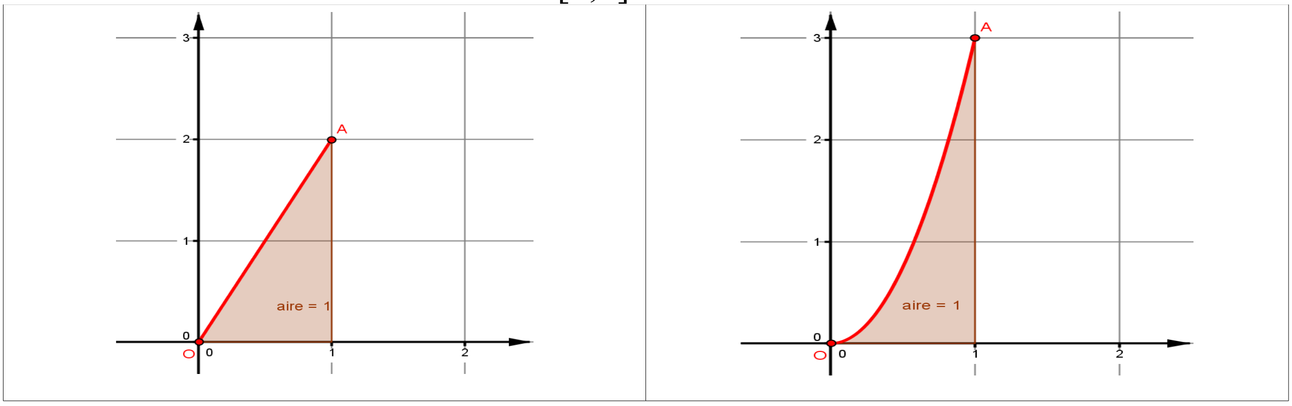
2°) f est continue sur I ;

3°) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$ si $I = [a; b]$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt = 1$ si $I = [a; +\infty[$

Exemples :

1°) Soit f la fonction définie sur [0;1] par $f(x) = 2x$. Montrer que f définit bien une fonction de densité sur [0;1].

2°) Soit f la fonction définie sur [0;1] par $f(x) = kx^2$. Déterminer k pour que f définisse une fonction de densité sur [0;1].



1.4) Loi de probabilité à densité sur un intervalle

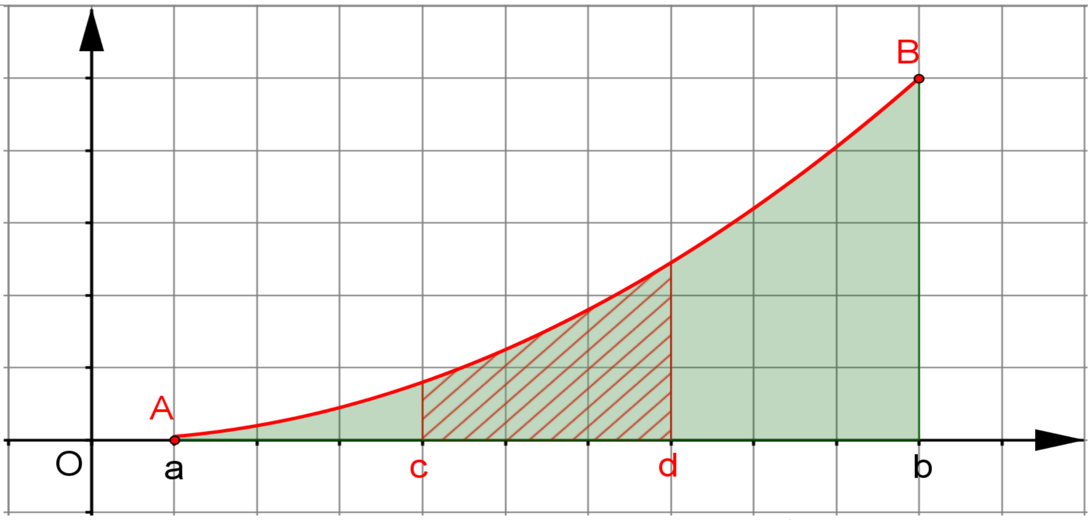
On considère une expérience aléatoire et Ω l'univers associé, muni d'une probabilité.

Définition 3.

Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle $[a;b]$ muni d'une fonction de densité f.
On définit la ***loi de probabilité de densité f de X***, en associant à tout intervalle $[c;d]$ inclus dans $[a; b]$, la probabilité de l'événement $X \in [c;d]$ c'est-à-dire $c \leqslant X \leqslant d$, égale à ***l'aire du domaine*** $\mathscr{D} = \{M(x;y)$ tels que : $c \leq x \leq d$ et $0 \leq y \leq f(x)\}$, c'es-à-dire ***l'aire du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = c et x = d.*** On a alors :

$$P(X \in [c;d]) = \int_c^d f(x)\,dx.$$

ou encore : $$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,dx.$$



$$P(a \leqslant X \leqslant b) = 1 \quad \textbf{et} \quad P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,dx$$

Propriétés immédiates.

Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle $[a;b]$ muni d'une fonction de densité f. Alors
(P_1) ***Probabilité d'un point*** : Pour tout réel $c \in [a;b]$: $P(X=c)=0.$
(P_2) ***Les bornes n'ont pas d'importance***. Pour tous nombres réels $c, d \in [a;b]$:

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = P(c \leqslant X < d) = P(c < X \leqslant d) = P(c < X < d)$$

(P_3) : ***Événement contraire***. Pour tout nombre réel $c \in [a;b]$:

$$P(X > c) = P(c < X \leqslant b) = 1 - P(a \leqslant X < c) = 1 - \int_a^c f(x)\,dx$$

Démonstration.

(P_1) Pour tout réel $c \in [a;b]$: $P(X=c) = P(c \leqslant X \leqslant c) = \int_c^c f(x)\,dx = 0.$

(P_2) $[c;d] = [c;d[\cup \{d\}$. Ces deux événements étant incompatibles, on a :

$$P([c;d]) = P([c;d[) + P(\{d\}) = P([c;d[) + 0 = P([c;d[).$$

(P_3) L'événement $(X > c) = (c < X \leqslant b)$ est l'événement contraire de $(a \leqslant X < c)$.
Donc, par définition des probabilités de deux événements contraires, nous avons :

$$P(X>c)=P(c<X\leqslant b)=1-P(a\leqslant X<c)=1-\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{CQFD.}$$

Remarques :

Les propriétés des probabilités dans le cas discret, s'étendent naturellement au cas continu. Soient A et B deux événements. Alors :

1°) $P(\varnothing)=0$; et en plus, dans le cas continu, P({c}) = P("$X=c$") = 0.

2°) $P(\Omega)=1$; ici P([a; b]) = 1.

3°) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

4°) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$; si A et B sont incompatibles.

5°) P($\overline{A}$) = 1 – P(A) ; où $\overline{A}$ désigne l'événement contraire de A.

6°) Si $P(B)\neq 0$, alors la probabilité conditionnelle de "*A sachant que B est réalisé*" est donnée par la formule : $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Exemples :

Soit X la variable aléatoire continue à valeurs dans l'intervalle [0; 1], *muni de la fonction densité f définie par :* $f(x)=3x^2$.

a) *Déterminer P(X = 0,5)*

b) *Calculer* $P(X\leqslant 0{,}5)$.

c) *En déduire* $P(X>0{,}5)$.

d) *Calculer* $P(0{,}3<X\leqslant 0{,}5)$.

e) *Calculer* $P_{(0{,}2\leqslant X<0{,}5)}(0{,}3\leqslant X<0{,}9)$.

Corrigé

Tout d'abord, pour les différents calculs, je détermine une primitive F de la fonction f.

$f(x)=3x^2$, donc la fonction F définie par $F(x)=x^3$ est une primitive de f sur [0,1].

[Je n'ai pas besoin de la constante pour le calcul de ces intégrales, puisqu'elle disparaît en faisant la soustraction $F(b)-F(a)$].

a) $P(X=0{,}5)=$ $P(0{,}5\leqslant X\leqslant 0{,}5)=\int_{0{,}5}^{0{,}5} f(x)\,dx=0.$

b)

$$P(X\leqslant 0{,}5)=P(0\leqslant X\leqslant 0{,}5)=\int_0^{0{,}5} f(x)\,dx=\int_0^{0{,}5} 3x^2\,dx=F(0{,}5)-F(0)=(0{,}5)^3-0^3=0{,}125$$

c) L'événement "$X>0{,}5$" est l'événement contraire de " $X\leqslant 0{,}5$ ".
Donc $P(X>0{,}5)=$ $1-P(X\leqslant 0{,}5)$ = 1 – 0,125 = 0,875.

d) $P(0{,}3\leqslant X\leqslant 0{,}5)=\int_{0{,}3}^{0{,}5} f(x)\,dx=\int_{0{,}3}^{0{,}5} 3x^2\,dx$

$P(0{,}3\leqslant X\leqslant 0{,}5)=F(0{,}5)-F(0{,}3)=(0{,}5)^3-(0{,}3)^3=0{,}125-0{,}027=0{,}098$

e) Par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_{(0{,}2\leqslant X<0{,}5)}(0{,}3\leqslant X<0{,}9)=P_{X\in[0{,}2\,;\,0{,}5]}(X\in[0{,}3\,;0{,}9])=\frac{P(X\in[0{,}2\,;0{,}5]\cap[0{,}3\,;0{,}9])}{P(X\in[0{,}2\,;0{,}5])}$$

Donc $$P_{(0{,}2\leqslant X<0{,}5)}(0{,}3\leqslant X<0{,}9)=\frac{P(X\in[0{,}3\,;0{,}5])}{P(X\in[0{,}2\,;0{,}5])}=\frac{\int_{0{,}3}^{0{,}5} f(x)\,dx}{\int_{0{,}2}^{0{,}5} f(x)\,dx}$$

$$=\frac{F(0{,}5)-F(0{,}3)}{F(0{,}5)-F(0{,}2)}=\frac{(0{,}5)^3-(0{,}3)^3}{(0{,}5)^3-(0{,}2)^3}=\frac{0{,}098}{0{,}117}\simeq 0{,}838 \quad \text{CQFD.}$$

1.5) Espérance d'une v.a. à densité

On considère une expérience aléatoire et Ω l'univers associé, muni d'une probabilité.

Définition 3.

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f sur l'intervalle [a;b].
Alors, l'espérance mathématique de X sur [a;b] est définie par :

$$E(X)=\int_a^b x f(x)dx$$

Remarque : Cette formule constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une v.a. discrète. En effet : $E(X)=\sum_{i=1}^n x_i p_i \to \int_a^b x f(x)dx$.
le symbole $\sum$ est remplacé par le symbole $\int$ et la probabilité p par $f(x)dx$.

Exemple : On reprend l'exemple précédent avec $f(x)=3x^2$ sur l'intervalle [0; 1].
Alors, par définition, l'expérance de X est donnée par :

$$E(X)=\int_0^1 x f(x)dx=\int_0^1 x\times 3x^2 dx=\int_0^1 3x^3 dx=\left[3\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{3}{4}-0=\frac{3}{4}$$.

II. Loi uniforme

2.1) Activité

A l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, choisir un nombre au hasard.

L'instruction ALEA() sur un tableur ou RAND# ou nbrAleat() sur une calculatrice, donnent un nombre au hasard compris entre 0 et 1, exclus.

a) Y a-t-il un nombre qui a plus de chance d'apparaître que les autres nombres ?
b) Calculer la probabilité de l'événement « le nombre choisi appartient à l'intervalle I = [0,15 ; 0,17[et possède exactement trois décimales ».
c) Même question avec « le nombre choisi appartient à l'intervalle J=[0,2 ;0,5[et possède exactement trois décimales ».
d) Calculer l'amplitude de chacun des intervalles I et J précédents.
Faites une *conjecture* pour calculer la probabilité de de l'événement « le nombre choisi appartient à l'intervalle K = [c; d[contenu dans [0;1[».

a) Naturellement, il n'existe pas de nombre « privilégié ». Tous les nombres compris entre 0 et 1 ont la même chance d'apparaître que les autres nombres. On pourrait assimiler ce choix aléatoire à une « *situation d'équiprobabilité* » !
b) On pose : Ω_1 = l'ensemble des nombres de [0 ; 1[qui possèdent exactement trois décimales. Ω_1 contient exactement 1000 nombres qui possèdent exactement trois décimales, de 0 = 0,000 à 0,999.
Soit A l'événement « le nombre choisi appartient à l'intervalle I = [0,15 ; 0,17[et possède exactement trois décimales ». A contient 20 nombres qui possèdent exactement trois décimales, de 0 = 0,150 à 0,169 inclus dans l'intervalle [0,15 ; 0,17[.
Par conséquent, comme nous sommes dans une situation d'équiprobabilité, on a :

$$P(A)=\frac{Nombre\ d'issues\ favorables}{Nombre\ d'issues\ possibles}=\frac{card(A)}{card\ \Omega_1}=\frac{20}{1000}=0{,}02$$

c) Soit B l'événement « le nombre choisi appartient à l'intervalle J = [0,2 ; 0,5[et possède exactement trois décimales ». B contient 20 nombres qui possèdent exactement trois décimales, de 0 = 0,200 à 0,499 inclus dans l'intervalle [0,2 ; 0,5[.
Par conséquent, comme nous sommes dans une situation d'équiprobabilité, on a :

$$P(B)=\frac{Nombre\ d'issues\ favorables}{Nombre\ d'issues\ possibles}=\frac{card(B)}{card\ \Omega_1}=\frac{300}{1000}=0{,}3$$

c) La longueur d'un intervalle [a;b] ou [a;b[ou]a;b[est égale à ($b-a$). Par conséquent
longueur(I) = longueur([0,15 ; 0,17[) = 0,02.
et longueur(J) = longueur([0,2 ; 0,5[) = 0,3.
Conjecture « Il semble que la probabilité que "le nombre choisi appartienne à un intervalle K =[$c;d$ [contenu dans [0;1[" soit égale à la longuer de cet intervalle ». Soit :

$P(X\in[c;d[)=d-c$ ou encore $P(X\in[c;d[)=\frac{d-c}{1-0}$.

2.2) Définition d'une loi uniforme

Définition :

Soient a et b deux nombres réels distincts. Soit X une variable aléatoire continue sur l'intervalle [$a;b$]. On dit que la v.a. X suit une ***loi uniforme*** lorsque sa densité de probabilité est une ***fonction constante*** sur [a; b].
On dit aussi que la v.a. X est ***uniformément répartie*** sur l'intervalle [$a;b$].

Propriété n°1.

La fonction de densité de probabilité de la loi uniforme sur l'intervalle [a; b] est définie sur [a; b] par $f(x)=\frac{1}{b-a}$.

Démonstration :

f est une *fonction constante* sur [a; b] donc pour tout $x\in[a;b]$: $f(x)=k$, où k est une constante réelle positive. De plus, une primitive de f sur [$a;b$] est la fonction F définie par : $F(x)=kx$. On alors, puisque $b-a\neq 0$:

$$\int_a^b f(x)dx=1 \quad \text{(ssi)} \quad F(b)-F(a)=1 \quad \text{(ssi)} \quad kb-ka=1 \quad \text{(ssi)} \quad k=\frac{1}{b-a} .$$

Conclusion : pour tout $x\in[a;b]$: $f(x)=\frac{1}{b-a}$. CQFD.

Propriété n°2.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [a; b]. Alors, pour tout intervalle $[c;d]$ contenu dans $[a;b]$, on a :

$$P(c\leqslant X\leqslant d)=\frac{d-c}{b-a}$$

Démonstration :

La fonction de densité de probabilité de la loi uniforme sur l'intervalle [a; b] est définie sur [a; b] par : $f(x)=\frac{1}{b-a}$. Donc :

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \left[\frac{1}{b-a} x\right]_c^d = \frac{1}{b-a} d - \frac{1}{b-a} c = \frac{d-c}{b-a}$$ CQFD.

2.3) Espérance d'une loi uniforme

Propriété n°3.

Soient a et b deux nombres réels distincts. Soit X une variable aléatoire qui suit la ***loi uniforme*** sur l'intervalle $[a; b]$. Alors, l'espérance de X est donnée par :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Démonstration :

La fonction de densité de probabilité de la loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ est définie sur $[a; b]$ par : $f(x) = \frac{1}{b-a}$. Donc

$$E(X) = \int_a^b x \times \frac{1}{b-a} dx = \left[\frac{1}{b-a} \times \frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$ CQFD.

Exemple :

Olivier vient tous les matins entre 7h et 7h 45 chez Karine prendre un café.

1°) *Sachant qu'Olivier ne vient jamais en dehors de la plage horaire indiquée et qu'il peut arriver à tout instant avec les mêmes chances, quelle densité peut-on attribuer à la variable aléatoire « heure d'arrivée d'Olivier » ?*

2°) *Calculer la probabilité qu'Olivier sonne chez Karine :*
a) Après 7h30 b) Avant 7h10 c) Entre 7h20 et 7h22 d) A 7h30 exactement.

3°) *Calculer l'heure moyenne d'arrivée d'Olivier ?*

Corrigé

1°) On appelle X la variable aléatoire « heure d'arrivée d'Olivier ». X est une v.a. uniformément répartie sur l'intervalle [7 ; 7,75] ou $[7 ; 7+\frac{3}{4}]$. On dit aussi que X suit la loi uniforme sur cet intervalle.

Remarque : Dans cet exercice, l'unité utilisée est « l'heure ». Les questions sont en minutes. On pourrait « tout transformer en minutes » et définir une nouvelle variable aléatoire Y, pour simplifier les calculs.

Sinon, écrire $1\,minute = \frac{1}{60} heure$ *et "traduire" toutes les questions en fractions d'heures !!*

Soit Y la variable aléatoire « le temps d'arrivée d'Olivier, exprimé en minutes, après 7 heures ». X est une v.a. uniformément répartie sur l'intervalle [0 ; 45].

2° a) *La probabilité qu'Olivier sonne chez Karine après 7h30 est donnée par :*

- Calculs avec les heures : $P(Après\ 7h30) = P(7{,}5 \leqslant X \leqslant 7{,}75) = \frac{7{,}75-7{,}5}{7{,}75-7} = \frac{0{,}25}{0{,}75} = \frac{1}{3}$
- Calculs avec les minutes : $P(Après\ 7h30) = P(30 \leqslant Y \leqslant 45) = \frac{45-30}{45-0} = \frac{1}{3}$

2° b) *La probabilité qu'Olivier sonne chez Karine avant 7h10 est donnée par :*

- Calculs avec les heures : $P(Avant\ 7\text{h}10)=P\left(7\leqslant X\leqslant 7+\frac{10}{60}\right)=\dfrac{7+\frac{1}{6}-7}{7+\frac{3}{4}-7}=\frac{1}{6}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{9}$
- Calculs avec les minutes : $P(Avant\ 7\text{h}10)=P(0\leqslant Y\leqslant 10)=\frac{10-0}{45-0}=\frac{2}{9}$

2° c) *La probabilité qu'Olivier sonne chez Karine entre 7h20 et 7h22 est donnée par :*

- Calculs avec les heures :

$$P(Entre\ 7\text{h}20\ et\ 7\text{h}22)=P\left(7+\frac{20}{60}\leqslant X\leqslant 7+\frac{22}{60}\right)=\dfrac{7+\frac{22}{60}-7-\frac{20}{60}}{7+\frac{3}{4}-7}=\frac{2}{60}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{45}$$

- *Calculs avec les minutes :* $P(Entre\ 7\text{h}20\ et\ 7\text{h}22)=P(20\leqslant Y\leqslant 22)=\frac{22-20}{45-0}=\frac{2}{45}$

2° d) *La probabilité qu'Olivier sonne chez Karine à 7h30 exactement est donnée par :*

- Calculs avec les heures : $P(A\ 7\text{h}30\ exactement)=P(7{,}5\leqslant X\leqslant 7{,}5)=\frac{7{,}5-7{,}5}{7{,}75-7}=0$
- *Calculs avec les minutes :* $P(A\ 7\text{h}30\ exactement)=P(30\leqslant Y\leqslant 30)=\frac{30-30}{45-0}=0$.

3°) *Calcul du temps moyen "espéré" :* $E(X)=\frac{0+45}{2}=22{,}5\ minutes$.

Par conséquent, l'heure moyenne d'arrivée d'Olivier est 7h 22min 30s.

III. Loi normale centrée réduite

3.1) Activité

Une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, de paramètres n et p, est une v. a. qui compte le nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes avec, $P(S) = p$. Les éléments caractéristiques d'une loi binomiale sont :

Rappel :

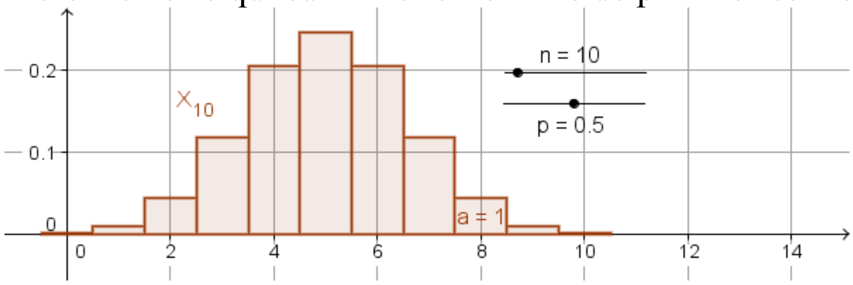
Soit X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors, l'espérance, la variance et l'écart-type de X sont donnés par :

$$m = E(X) = np\ ,$$
$$V(X)=\sigma^2=np(1-p)$$
$$\text{et}\quad \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{np(1-p)}$$

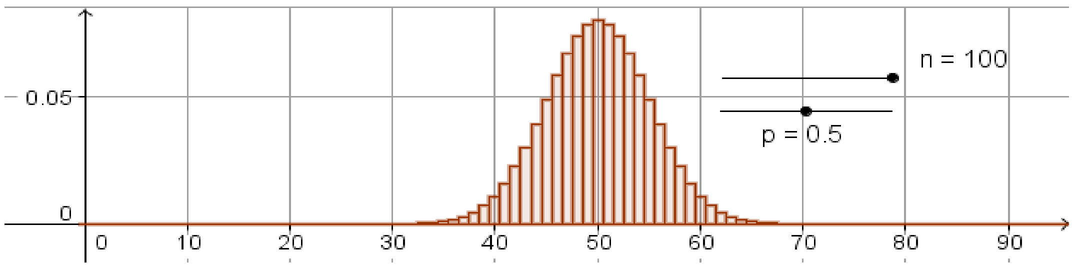
Si X est une variable aléatoire donnée, d'espérance $E(X) = m$. Alors la variable aléatoire définie par $Y = X - m$, a une espérance nulle $E(Y) = m - m = 0$. On dit que Y est la *variable aléatoire* ***centrée*** *associée à X*. En effet, lorsqu'on soustrait la valeur moyenne à toutes les valeurs d'une série statistique, on obtient une moyenne égale à 0.

D'autre part,
Si X est une variable aléatoire donnée, de variance $V(X) = \sigma^2$. Alors la variable aléatoire définie par $Z = X/\sigma$, a une variance $V(Z) = V(X)/\sigma^2 = 1$. On dit que Z est la *variable aléatoire* ***réduite*** *associée à X*. En effet, lorsqu'on divise toutes les valeurs par l'écart-type, on obtient un écart-type égal à 1.

Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.



Représentation graphique de X_{10} pour $n = 10$ et $p = 0,5$ donc $E(X_{10}) = 5$ et $\sigma = 1,581$..



Représentation graphique de X_{100} pour $n = 100$ et $p = 0,5$ donc $E(X_{100}) = 50$ et $\sigma = 5$.

On définit une nouvelle variable aléatoire Z_n de la manière suivante :

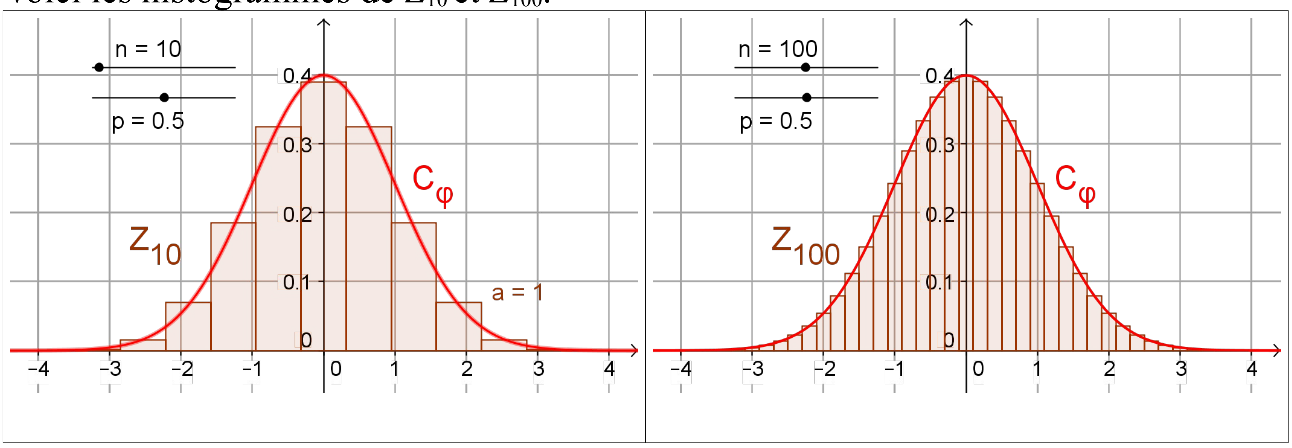
$$Z_n = \frac{X_n - m}{\sigma} = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Z_n est une <u>variable aléatoire ***centrée réduite***</u> : $E(Z_n) = 0$ et $\sigma(Z_n) = 1$.

Lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes et p fixé (ici $p = 0,5$), le mathématicien français Abraham de Moivre a montré que les histogrammes représentant la loi de Z_n se rapprochent de la courbe d'une fonction φ (lire "phi")

définie sur $\mathbb{R}$ par : $$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Voici les histogrammes de Z_{10} et Z_{100}.



On peut dire alors que lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes (n tend vers $+\infty$) et p fixé, alors la variable aléatoire Z_n peut être approchée par une ***variable aléatoire continue*** ayant pour ***fonction densité la fonction φ*** définie ci-dessus.

3.2) La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

a) Définition.

Une variable aléatoire Z suit ***la loi normale centrée réduite***, notée $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque Z admet pour fonction densité la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

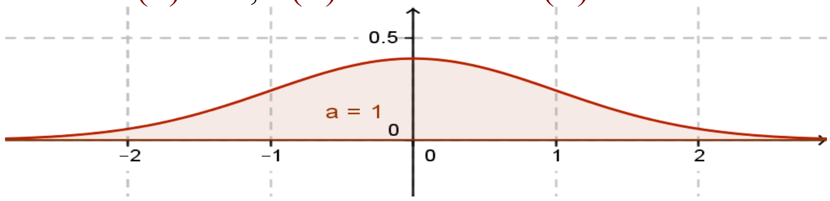
b) Propriétés.

(P1) φ est une fonction *continue* et *positive* sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$.

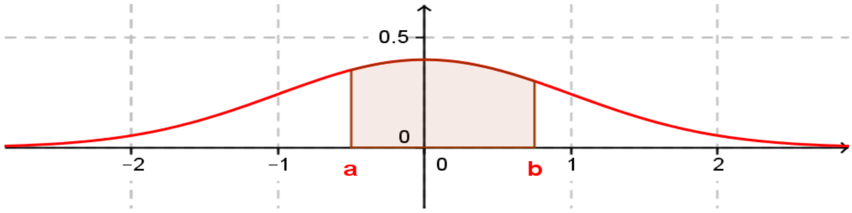
L'aire totale du domaine compris entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 1.

Donc φ est bien une fonction de densité de probabilité.

Par définition : $E(Z) = 0$, $V(X) = \sigma^2 = 1$ et $\sigma(X) = 1$.



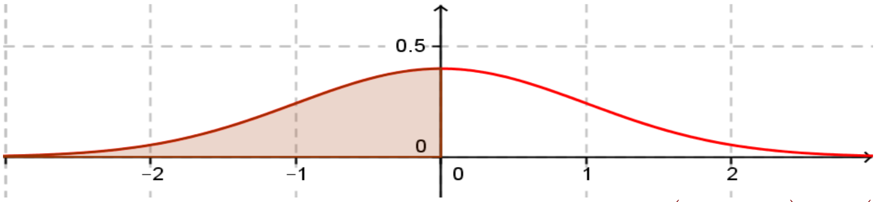
(P2) Pour tous nombres réels a et b, tels que $a\leqslant b$: $P(a\leqslant Z\leqslant b)=\int_a^b\varphi(x)dx$



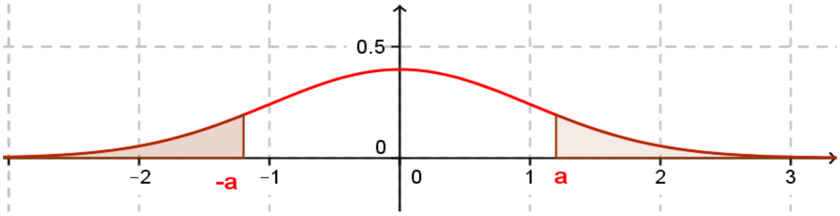
Et d'après les propriétés d'une fonction de densité de probabilités, on a :

$$P(a\leqslant Z\leqslant b)=P(a\leqslant Z<b)=P(a<Z\leqslant b)=P(a<Z<b)$$

(P3) La fonction φ est paire donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Donc : $P(Z\leqslant 0)=P(Z\geqslant 0)=\frac{1}{2}$



(P4) Pour tout nombre réel a, on a par symétrie : $P(Z\leqslant -a)=P(Z\geqslant a)$



(P5) Valeurs de référence :

$$P(-1\leqslant Z\leqslant 1)=0,6829\ldots \quad = 68,3\%$$
$$P(-2\leqslant Z\leqslant 2)=0,9545\ldots \quad = 95,5\%$$
$$P(-3\leqslant Z\leqslant 3)=0,9973\ldots \quad = 99,7\%$$

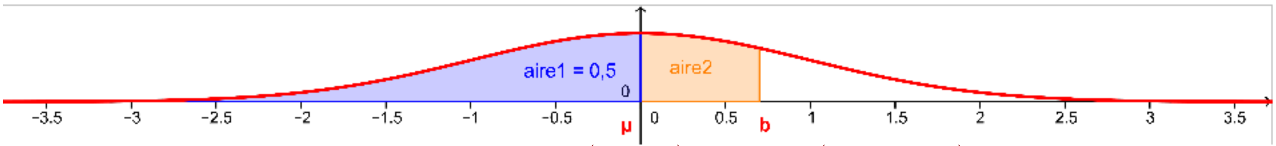
3.3) Utilisation de la calculatrice

***c*)** Calcul des probabilités à la calculatrice : Loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ ou $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$:

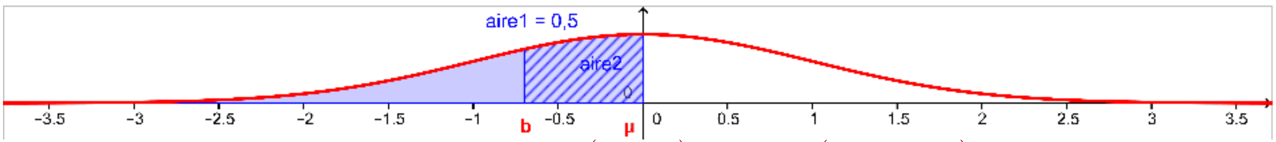
Casio : Graph 35+ et modèles sup.	*Texas : TI82 Stats et modèles sup.*
Calcul des probabilités ***P*(– 0,5 < *Z*< 1,2)** Menu▶ **STAT▶DIST▶ NORM▶ NCD** **Pour calculer** ***P*(– 0,5 < *Z* < 1,2)** **DC normale** (ou normal C.D) **Data : Variable** **Lower : -0.5** **Upper : 1.2** **σ : 1** **μ : 0** **Save Res :None** **Execute** **CALC** Pour calculer, appuyer sur **F1** Après exécution on obtient : **DC normale** **P= 0.57639274** **z:Low=-0.5** **z:Up = 1.2**	**Calcul des probabilités** ***P*(– 0,5 < *Z*< 1,2)** Menu▶ **2nd DISTR** (ou ▶ **Distrib**)  **Pour calculer** ***P*(– 0,5< *Z*<1,2)** Menu ▶ **2nd DISTR** ▶ **normalcdf** ou ▶ **normalFrép** (version fr) Compléter les paramètres : ***a*, *b* , μ , σ** **normalcdf(-0.5,1.2,0,1)** Après exécution on obtient : **0.5763927362**

Remarques :

Certaines calculatrices ne fournissent pas $P(X<b)=P(X\leqslant b)$ mais seulement $P(a\leqslant X\leqslant b)$.
Pour le calcul de $P(X<b)=P(X\leqslant b)$ dans le cas où X suit une loi $N(\mu,\sigma^2)$, la méthode rigoureuse pratiquée est donc la suivante (*Faire une figure !*) : ***très important !!***

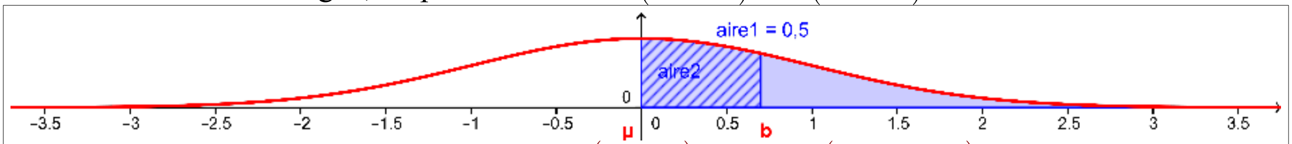


Si ***b*** > **μ**, on utilise : $P(X<b)=0{,}5+P(\mu\leqslant X\leqslant b)$;

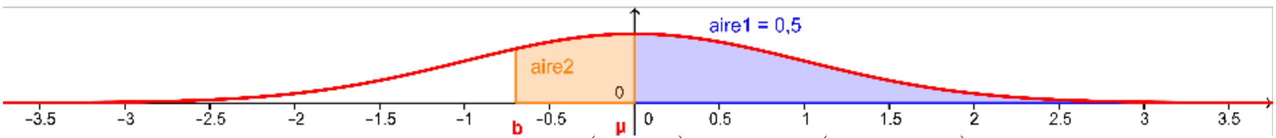


Si ***b*** < **μ**, on utilise : $P(X<b)=0{,}5-P(b\leqslant X\leqslant\mu)$.

Avec une méthode analogue, on peut calculer $P(X>b)=P(X\geqslant b)$:



Si ***b*** > **μ**, on utilise : $P(X>b)=0{,}5-P(\mu\leqslant X\leqslant b)$;



Si ***b*** < **μ**, on utilise : $P(X>b)=0{,}5+P(b\leqslant X\leqslant\mu)$.

Cependant, comme la fonction $\exp(-x^2)$ tend vers 0 *<u>très rapidement</u>* lorque x tend vers l'infini, on peut calculer $P(X<b)=P(X\leqslant b)$ en écrivant sur une calculatrice les valeurs : $a = -10^{99}$ et b. Ce qui donne : $\boxed{P(X<b)=P(-10^{99}<X<b)}$.

IV. Loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

4.1) Définition

Une variable aléatoire X suit une ***loi normale*** $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ si la variable aléatoire $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

4.2) Espérance et écart-type

Si une v.a. X suit une ***loi normale*** $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, alors $E(X)=\mu$, $V(X)=\sigma^2$ et $\sigma=\sqrt{V(X)}$

<u>Attention !</u>

Lorsqu'on écrit "X suit la loi $\mathcal{N}(40;5)$", cela signifie que la valeur moyenne de X est bien $E(X) = 40$, alors que 5 désigne la variance de X, donc l'écart-type est $\sigma=\sqrt{5}$.

Attention, dans certains ouvrages (anciens), on note $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ au lieu de $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

<u>Exemple</u> (Extrait des documents ressources) :

La masse en kg des nouveaux nés à la naissance est une variable aléatoire qui peut être modélisée par une loi normale de moyenne $\mu = 3{,}3$ *et d'écart-type* $\sigma = 0{,}5$. *Calculer la probabilité qu'un nouveau né pèse moins de* 2,5 kg *à la naissance.*

La probabilité qu'un nouveau né pèse moins de 2,5 kg à la naissance est donc : $P(X< 2{,}5)$.

La variable $Z=\dfrac{X-3{,}3}{0{,}5}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

On a alors : $P(X < 2{,}5) = P(X-3{,}3 < 2{,}5-3{,}3) = P\left(\dfrac{X-3{,}3}{0{,}5}<\dfrac{2{,}5-3{,}3}{0{,}5}\right)$

Ce qui donne : $P(X < 2{,}5) = P(Z < -1{,}6) = 1 - P(Z < 1{,}6) \approx 0{,}055$.

La probabilité cherchée est donc égale à 0,055 à 10^{-3} près.

On peut aussi obtenir directement la valeur de $P(X < 2{,}5)$ à la calculatrice.

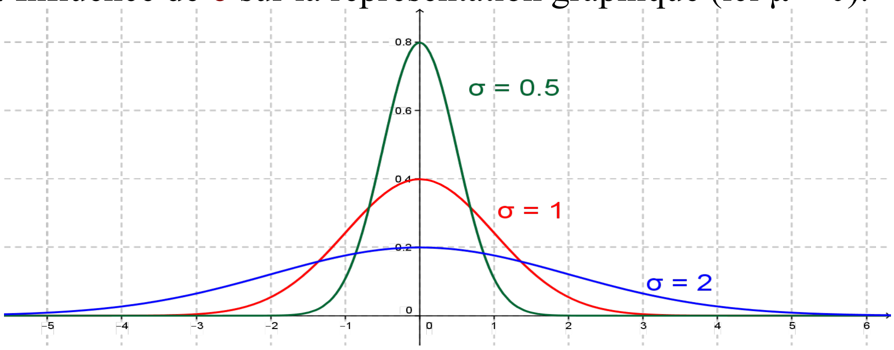
4.3) Courbe de la fonction de densité de probabilité

Soit X une v.a.continue qui suit une ***loi normale*** $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, alors :

1°) La courbe représentative C_f de sa fonction f de densité de probabilité admet la doite d'équation "$x = \mu$" pour axe de symétrie ;

2°) La courbe représentative C_f est "pointue" si $0 < \sigma <1$ et C_f est "étalée" si $\sigma >1$.

<u>Illustration</u> : Influence de σ sur la représentation graphique (ici $\mu = 0$).

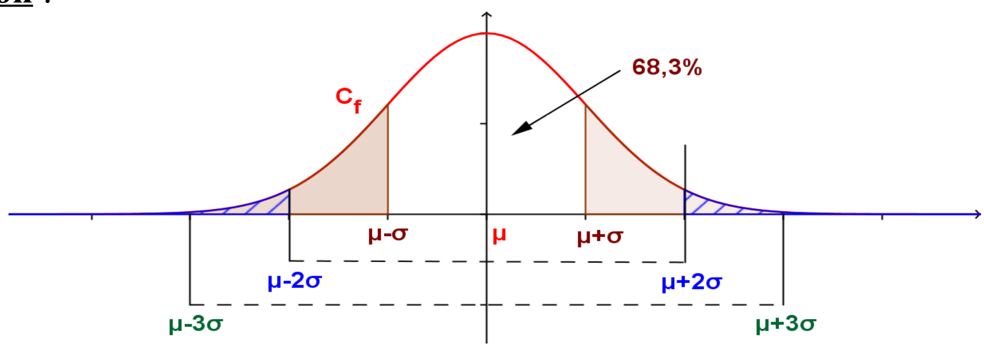


4.4) Les intervalles « Un, deux, trois sigmas »

Les résultats suivants sont utilisés dans de nombreuses situations.

$$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=0{,}6829...\quad=68{,}3\%$$
$$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)=0{,}9545...\quad=95{,}5\%$$
$$P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)=0{,}9973...\quad=99{,}7\%$$

Illustration :



4.5) Déterminer *t* connaissant la valeur de P(X< t)

Exemple : Soit X une v.a. continue qui suit une loi normale $\mathcal{N}(10;\,0{,}8^2)$. Déterminer une valeur approchée de t au centième près telle que 1°) $P(X\leqslant t)=0{,}95$ et 2°) $P(X\geqslant t)=0{,}85$.

C'est le calcul inverse.

1°) Pour déterminer t telle que : $P(X\leqslant t)=0{,}95$ on utilise les instructions inverses sur la calculatrice.

Casio : Graph 35+ et modèles sup.	*Texas : TI82 Stats et modèles sup.*
Menu▶ **STAT**▶**DIST**▶ **NORM**▶ **F3** **invN** **Pour calculer t tel que** *P(X < t) = 0,95* Normal inverse Data : Variable Tail : Left Area : 0,95 σ : 10 μ : 0,8 Save Res :None Execute CALC Pour calculer, appuyer sur **F1** Après exécution on obtient : Normal inverse xInv=11,3158829	**Pour calculer *t* tel que** *P(X < t) = 0,95* Menu▶ **2nd DISTR** (ou ▶ **Distrib**)  **Pour calculer** *P(X < t) = p* Menu ▶ **2nd DISTR** ▶ **invNorm** ou ▶ **FracNormale** (version fr) Compléter les paramètres : ***p*, μ , σ** FracNormale(0.95,10,0.8) Après exécution on obtient : 11,3158829

Conclusion : Une valeur approchée de t telle que $P(X\leqslant t)=0{,}95$ est $t\approx 11{,}32$ au centième près.

2°) Pour déterminer une valeur approchée de t telle que $P(X\geqslant t)=0{,}85$,

– sur **Casio**, il suffit de remplacer "Left" par "Right". On obtient directement

$t \approx 9{,}17$.

- Sur **Texas** : On fait une petite transformation :
  $P(X \leqslant t) = 1 - P(X \geqslant t) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$
  Avec la procédure ci-dessus, on cherche *t* telle que $P(X \leqslant t) = 0{,}15$ et on obtient : $t \approx 9{,}17$.

OUF !