

## Calcul des probabilités

### Conditionnement & indépendance

#### Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
<b>Conditionnement</b> Conditionnement par un événement de probabilité non nulle.  Notation $P_A(B)$ .	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée.</li> <li>• Exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités.</li> <li>• Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.</li> </ul>	On représente une situation à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau. On énonce et on justifie les règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés. Un arbre pondéré correctement construit constitue une preuve.  Le vocabulaire lié à la formule des probabilités totales n'est pas attendu du programme, mais la mise en oeuvre de cette formule doit être maîtrisée.  Cette partie du programme se prête particulièrement à l'étude de situations concrètes.

## I. Probabilités conditionnelles

### 1.1) Étude d'un exemple.

On considère *l'univers*  $\Omega$  formé des trente élèves de la classe de Terminale S. L'*expérience aléatoire* consiste à choisir un élève au hasard dans cette classe. On considère les deux événements suivants :

$A$  = « l'élève choisi fait de l'allemand en LV1 » ;  $\bar{A}$  est l'événement contraire.

$F$  = « l'élève choisi est une fille » ;  $\bar{F}$  est l'événement contraire.

Chacun de ces deux caractères partage  $\Omega$  en deux parties :  $A$  et  $\bar{A}$  ainsi que  $F$  et  $\bar{F}$ . On obtient le tableau des effectifs suivants :

	$F$	$\bar{F}$	Totaux
$A$	10	7	17
$\bar{A}$	4	9	13
Totaux	14	16	30

Chaque élève a exactement la même chance d'être choisi. Nous sommes donc en situation d'équiprobabilité :

- La probabilité que l'élève choisi fasse de l'allemand est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables}}{\text{Nombre d'issues possibles}} = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{17}{30}$$

- La probabilité que l'élève choisi soit une fille est donnée par :

$$P(F) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables}}{\text{Nombre d'issues possibles}} = \frac{\text{card } F}{\text{card } \Omega} = \frac{14}{30}$$

Maintenant, On choisit au hasard un élève qui fait allemand en LV1. Calculer la probabilité que ce soit une fille.

**On change d'univers** : Le nouvel univers est  $A$ . L'élève choisi est donc dans  $A \cap F$

	$F$	$\bar{F}$	Totaux
$A$	10	7	17
$\bar{A}$	4	9	13
Totaux	14	16	30

- « On choisit un élève qui fait allemand en LV1 », la probabilité que cet élève soit une fille, notée  $P_A(F)$ , est donnée par :

$$P_A(F) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables}}{\text{Nombre d'issues possibles}} = \frac{\text{card } A \cap F}{\text{card } A} = \frac{10}{17}$$

On peut encore écrire  $P_A(F)$ , de la façon suivante :

$$P_A(F) = \frac{\text{card } A \cap F}{\text{card } \Omega} \times \frac{\text{card } \Omega}{\text{card } A} = P(A \cap F) \times \frac{1}{P(A)}$$

ou encore :

$$P_A(F) = \frac{P(A \cap F)}{P(A)}$$

Conclusion : On peut exprimer « la probabilité de F, sachant que A est réalisé » comme quotient de  $P(A \cap F)$  et de  $P(A)$ .

## 1.2) Définition de la probabilité conditionnelle

### **Définition :**

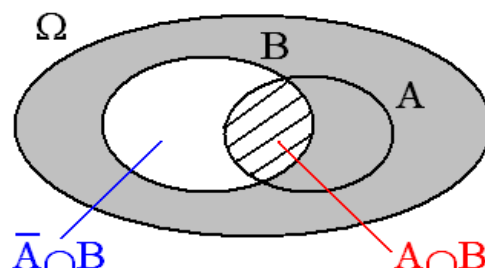
Soit  $\Omega$  un ensemble fini et  $P$  une loi de probabilité sur l'univers  $\Omega$  liée à une expérience aléatoire. Soit A et B deux événements de  $\Omega$  tels que  $P(B) \neq 0$ . On définit **la probabilité que « A soit réalisé sachant que B est réalisé »** de la manière suivante :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{où } P_B(A) \text{ se lit « P-B-de-A »}$$

$P_B(A)$  se notait anciennement  $P(A/B)$  et se lisait « P-de-A-sachant-B ».

En effet, dans cette définition, « l'univers est restreint à B ».

- L'ensemble de toutes les issues possibles est égal à B
- L'ensemble de toutes les issues favorables est égal à  $A \cap B$ .



### **Conséquences immédiates :**

Soit A et B deux événements de  $\Omega$  tels que  $P(B) \neq 0$ .

- On peut écrire toutes les probabilités comme des probabilités conditionnelles.  
 $P(\Omega) = 1$ . Donc pour tout événement A :  $P(A) = P_\Omega(A)$ .

ii)  $P_B(B)=1$  ;  $P_B(\Omega)=1$  ;  $P_B(\emptyset)=0$  .

iii) L'événement contraire de «  $A$  est réalisé sachant que  $B$  est réalisé » est «  $\bar{A}$  est réalisé sachant que  $B$  est réalisé ». En effet,  $B=(B \cap \bar{A}) \cup (B \cap A)$  :

$$P_B(\bar{A}) + P_B(A) = 1 \text{ ou encore } P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$$

iv) Si  $A$  et  $C$  sont deux événements quelconques, on peut étendre la formule vue en Seconde aux probabilités conditionnelles :

$$P_B(A \cup C) = P_B(A) + P_B(C) - P_B(A \cap C)$$

v) Si  $A$  et  $C$  sont deux événements **incompatibles**, on a :

$$P_B(A \cup C) = P_B(A) + P_B(C)$$

**Conséquence très importante :** (en écrivant l'égalité des produits en croix) :

Pour tous événements  $A$  et  $B$  de  $\Omega$  tels que  $P(B) \neq 0$  , on obtient **la formule des probabilités composées** :

$$P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$$

**Exemple :**

Dans notre exemple ci-dessus, nous avons déjà calculé :  $P_A(F) = \frac{10}{17}$  et  $P(A) = \frac{17}{30}$  .

On choisit un élève au hasard dans la classe de TS2. Calculer la probabilité que ce soit une fille qui fait de l'allemand. Ce qui correspond à l'événement  $A \cap F$  .

Nous avons deux méthodes d'aborder cette question :

- **1ère méthode** : Nous connaissons déjà les effectifs. Donc

$$P(A \cap F) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables}}{\text{Nombre d'issues possibles}} = \frac{\text{card } A \cap F}{\text{card } \Omega} = \frac{10}{30}$$

- **2ème méthode** : Nous appliquons la formule ci-dessus :

$$P(A \cap F) = P_A(F) \times P(A) = \frac{10}{17} \times \frac{17}{30} = \frac{10}{30} \text{ qu'on peut naturellement simplifier...}$$

### 1.3) Des probabilités dans un tableau à double entrée.

On pourrait présenter les données de notre exemple sous la forme de tableau de **fréquences** ou de **proportions** ou de **probabilités** des différents événements :

	$F$	$\bar{F}$	Totaux
$A$	0,33	0,23	0,56
$\bar{A}$	0,14	0,3	0,44
Totaux	0,47	0,53	1

↔

	$F$	$\bar{F}$	Totaux
$A$	$P(A \cap F)$	$P(A \cap \bar{F})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap F)$	$P(\bar{A} \cap \bar{F})$	$P(\bar{A})$
Totaux	$P(F)$	$P(\bar{F})$	$P(\Omega)$

On utilise donc la formule des probabilités conditionnelles pour calculer  $P_A(F)$  comme suit  $P_A(F) = \frac{P(A \cap F)}{P(A)} = \frac{0,33}{0,56} \simeq 0,59$  et on avait déjà calculé  $P_A(F) = \frac{10}{17} \simeq 0,59$  .

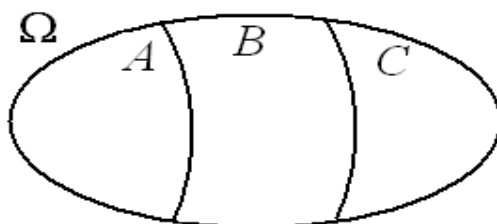
## II. Partition de l'univers

### Définition :

Soit  $\Omega$  *un ensemble fini* et  $A, B$  et  $C$  trois événements de  $\Omega$ . On dit que les événements  $A, B$  et  $C$  *forment* ou *réalisent* **une partition** de  $\Omega$  si et seulement si les 3 conditions suivantes sont satisfaites :

- i)  $A, B$  et  $C$  sont non vides, (cette condition n'est pas toujours vérifiée dans certaines démonstrations) ;
- ii) Ces 3 événements sont deux à deux incompatibles, c'est-à-dire :  
 $A \cap B = \emptyset ; B \cap C = \emptyset$  et  $A \cap C = \emptyset$  ;
- iii) La réunion de ces 3 événements est égale à  $\Omega$  ; c'est-à-dire :  
 $A \cup B \cup C = \Omega$  .

*On peut généraliser cette définition à 2 ou plusieurs événements.*



### Exemple :

Soit  $\Omega$  = l'ensemble des élèves du lycée. On choisit un élève au hasard et on lui demande sa classe. On pose  $B_1$  = « l'élève est en **seconde** »,  $B_2$  = « l'élève est en **première** »,  $B_3$  = « l'élève est en **Terminale** » et  $B_4$  = « l'élève est en **BTS** », alors  $B_1, B_2, B_3$  et  $B_4$  forment une partition de  $\Omega$  .

### Un cas particulier très important :

Soit  $B$  un événement de  $\Omega$  tel que  $P(B) \neq 0$  . Alors  $B$  et  $\bar{B}$  forment une partition de l'univers  $\Omega$  ( $n=2$ ).

### Exemple :

Au lycée, si on pose  $B$  = « l'élève fait de l'allemand ». Alors  $B$  et  $\bar{B}$  forment une partition de  $\Omega$

### Théorème des probabilités totales :

#### Théorème 1. :

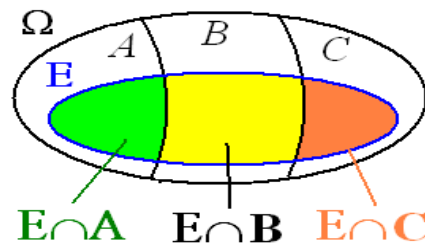
Soit  $\Omega$  *un ensemble fini* et  $A, B$  et  $C$  trois événements qui forment une partition de  $\Omega$  . Soit  $E$  un événement quelconque de  $\Omega$  . Alors

$$P(E) = P(E \cap A) + P(E \cap B) + P(E \cap C)$$
$$P(E) = P_A(E) \times P(A) + P_B(E) \times P(B) + P_C(E) \times P(C)$$

### En effet

Soit  $E$  un événement quelconque de  $\Omega$  . Alors  $E \cap A, E \cap B$  et  $E \cap C$  forment une partition de  $E$ . Ces 3 événements ne sont pas tous (forcément) non vides.

Ces 3 événements sont deux à deux incompatibles et leur réunion est égale à  $E$ .



Par conséquent,  $E = (E \cap A) \cup (E \cap B) \cup (E \cap C)$ . Donc

$$P(E) = P((E \cap A) \cup (E \cap B) \cup (E \cap C))$$

donc  $P(E) = P(E \cap A) + P(E \cap B) + P(E \cap C)$

Et par d'après la propriété des probabilités composées, on obtient :

$$P(E) = P_A(E) \times P(A) + P_B(E) \times P(B) + P_C(E) \times P(C) \quad \text{CQFD.}$$

**Un cas particulier très important :**

**Théorème 2.** :

Soit  $B$  un événement de  $\Omega$  tel que  $P(B) \neq 0$ . Alors  $B$  et  $\bar{B}$  forment une partition de l'univers  $\Omega$ . ( $n=2$ ). Donc, pour tout événement  $A$  de  $\Omega$ , on a :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$P(A) = P_B(A) \times P(B) + P_{\bar{B}}(A) \times P(\bar{B})$$

**Exemple :**

Soit  $A$  et  $B$  deux événements de  $\Omega$  tels que  $P(A \cap B) = 0,2$ ,  $P(B) = 0,4$  et  $P_{\bar{B}}(A) = 0,3$ .  
 i) Calculer  $P(A)$ . ii) En déduire  $P(A \cup B)$ . iii) Calculer  $P_{\bar{A}}(B)$ ,  $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ , ...

i) Pour calculer  $P(A)$ , nous avons besoin de calculer d'abord  $P(A \cap \bar{B})$ .

Et pour calculer  $P(A \cap \bar{B})$ , nous avons besoin de calculer  $P(\bar{B})$ .

Or,  $B$  et  $\bar{B}$  sont deux événements contraires, donc  $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$ ,  
 donc  $P(\bar{B}) = 1 - 0,4$  donc  $P(\bar{B}) = 0,6$ .

D'autre part, on sait que :  $P_{\bar{B}}(A) = 0,3$ , donc  $P(A \cap \bar{B}) = P_{\bar{B}}(A) \times P(\bar{B})$ ,

donc  $P(A \cap \bar{B}) = 0,3 \times 0,6$ , donc  $P(A \cap \bar{B}) = 0,18$ .

Maintenant, nous pouvons appliquer le théorème des probabilités totales ( $n=2$ ) :  $B$  et  $\bar{B}$  forment une partition de  $\Omega$ , donc :  $(A \cap B)$  et  $(A \cap \bar{B})$  forment une partition de  $A$ . Donc :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = 0,2 + 0,18 = 0,38.$$

**Conclusion 1.** :  $P(A) = 0,38$  (OUF !!)

ii) On sait que  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,38 + 0,4 - 0,2 = 0,58$

**Conclusion 2.** :  $P(A \cup B) = 0,58$  (C'est plus simple ! Non !)

iii) Amusez-vous à calculer  $P_{\bar{A}}(B)$ ,  $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ , ...

### III. Arbres « des possibles » et arbres pondérés de probabilités

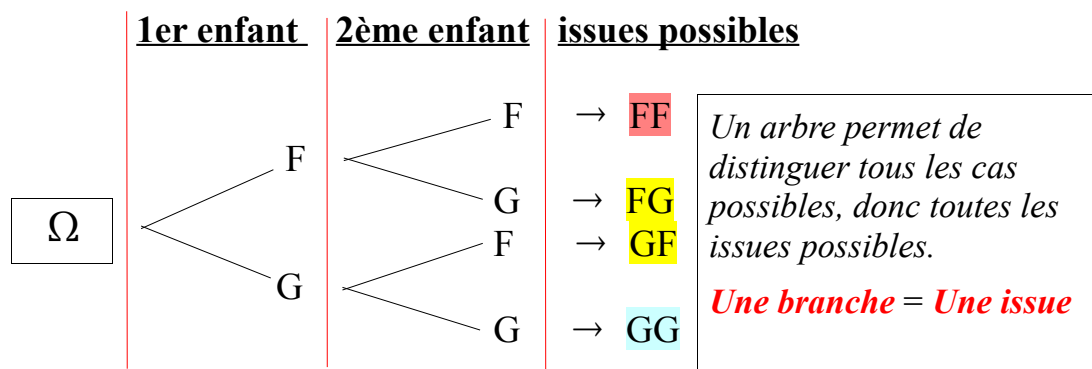
Nous avons déjà rencontré en classes de Seconde et en 1ère, la notion d'« arbres des possibles » et d'« arbres pondérés de probabilités ».

- i) On utilise un **arbre simple** ou **arbre des possibles** pour dénombrer toutes les issues possibles, en général, dans des situations d'équiprobabilité. On calcule les probabilités comme *le quotient des nombres d'issues favorables par le nombre de cas possibles*.
- ii) On utilise un **arbre pondéré des probabilités** pour dénombrer toutes les issues possibles, en précisant la probabilité de réalisation de chaque issue.

#### Exemple 1.

Une famille a deux enfants. On suppose qu'il y a autant de chances d'obtenir un garçon qu'une fille. Calculer la probabilité des événements "obtenir deux filles" puis "obtenir deux enfants de sexes différents". (On suppose qu'il n'y a pas de jumeaux).

On appelle F l'événement "obtenir une fille" et G l'événement "obtenir un garçon" à chaque naissance :



L'univers associé à cette situation comporte *quatre* issues possibles. Donc :

$\Omega = \{FF ; FG ; GF ; GG\}$ . Ainsi, si l'événement A = « obtenir deux filles », alors :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{1}{4}$$

Et si on appelle B = « obtenir deux enfants de sexes différents », on a  $B = \{FG ; GF\}$  et  $\text{card}(B) = 2$ . Donc

$$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

**Remarque :** Pour *trois enfants*, faites un arbre et montrer qu'il y a 8 issues possibles !

#### Arbre pondéré pour calculer des probabilités

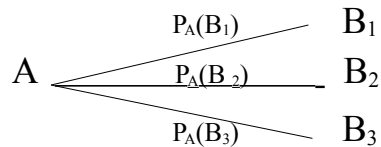
##### **Définition.**

Dans une expérience aléatoire sur un univers  $\Omega$ , on considère deux événements A et B. On dit qu'**un arbre** est **pondéré** lorsque, sur chaque branche, on indique la probabilité d'obtenir l'événement suivant.

## Méthodes de calcul :

**Règle 1 :** La probabilité de la branche partant de A vers B est égale à « la probabilité de B sachant A ».  $A \xrightarrow{P_A(B)} B$ . En particulier : la probabilité de la branche partant  $\Omega$  vers A est égale à  $P(A)$ .  $\Omega \xrightarrow{P(A)} A$ .

**Règle 2 :** La somme des probabilités des branches partant d'une même racine est toujours égale à 1 :  $P_A(B_1) + P_A(B_2) + P_A(B_3) = 1$



**Règle 3 :** La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches de ce chemin et représente la probabilité de l'intersection des événements sur ce chemin :  $P(A) \times P_A(B) \times P_B(C) = P(A \cap B \cap C)$ .

$$\Omega \xrightarrow{P(A)} A \xrightarrow{P_A(B)} B \xrightarrow{P_B(C)} C$$

**Règle 4 :** La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de tous les chemins correspondant à cet événement.

L'exemple suivant illustre cette situation (question 3°).

### **Exemple** (Extrait Ex n°1 BAC S 1996)

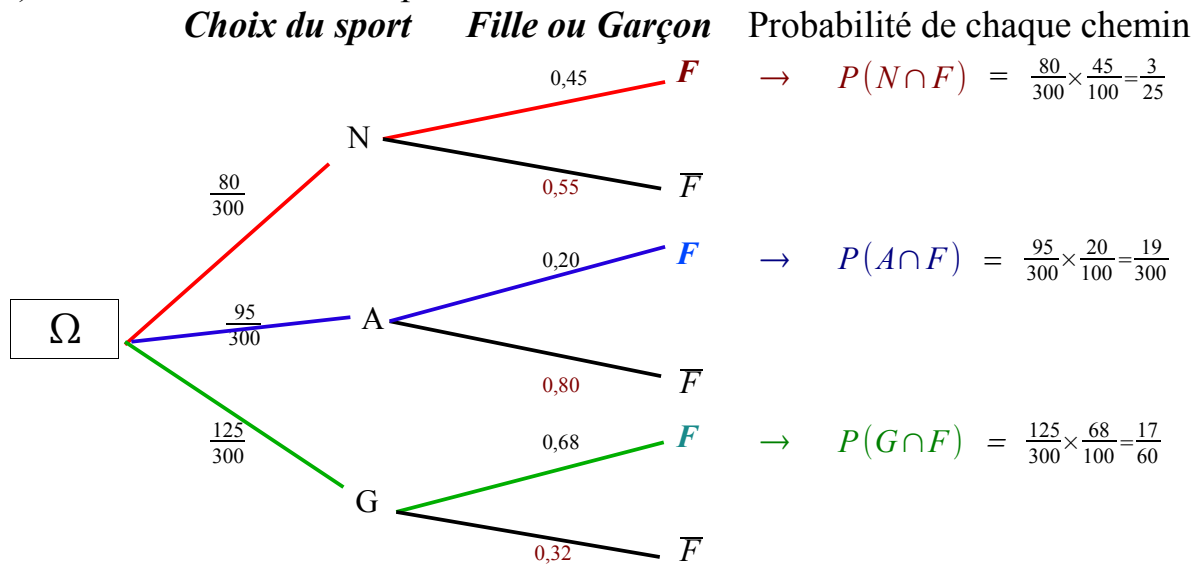
Un club sportif compte 80 inscrits en natation, 95 en athlétisme et 125 en gymnastique. Chaque inscrit pratique un seul sport.

**N.B.** - Si  $E$  est un évènement, on notera  $P(E)$  sa probabilité et  $\bar{E}$  l'évènement contraire. Si  $E$  et  $F$  sont deux évènements,  $P_F(E)$  est la probabilité de «  $E$  sachant que  $F$  est réalisé ». On donnera les valeurs exactes puis une valeur approchée arrondie au millième près.

Parmi les inscrits en natation, 45% sont des filles. De même 20% des inscrits en athlétisme et 68% des inscrits en gymnastique sont des filles.

- 1°) Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
- 2°) On choisit un inscrit au hasard. Quelle est la probabilité  $p_1$  que l'inscrit choisi soit une fille pratiquant l'athlétisme ?
- 3°) On choisit un inscrit au hasard. Quelle est la probabilité  $p_2$  que ce soit une fille ?
- 4°) Si on choisit au hasard une fille, quelle est la probabilité  $p_3$  qu'elle pratique l'athlétisme ?

1°) Construction d'un arbre pondéré.



2°) On choisit un inscrit au hasard (sous entendu « dans tout le club»).

On appelle E l'événement : E = « l'inscrit choisi est une fille pratiquant l'athlétisme », ce qui signifie « l'inscrit choisi est une fille **et** qui pratique l'athlétisme ».

Donc  $E = (A \cap F)$ . On applique la règle n°3. Par suite, la probabilité de E est égale au produit de toutes les probabilités des branches de ce chemin :

$$p_1 = P(E) = P(A \cap F)$$

$$p_1 = P(A) \times P_A(F)$$

$$p_1 = \frac{95}{300} \times \frac{20}{100} = \frac{19}{300} \text{ valeur exacte}$$

$$p_1 \approx 0,633 \text{ valeur approchée}$$

3°) On choisit un inscrit au hasard (sous entendu « dans tout le club»).

F est l'événement : F = « l'inscrit choisi est une fille ». On applique la règle n°4.

Par suite, La probabilité de F est la somme des probabilités des chemins (en couleur) correspondant à cet événement. Il y en a trois. Il y a des filles dans chaque groupe.

En réalité, c'est une application directe du théorème des probabilités totales :

N, A et G sont deux à deux incompatibles et forment une partition de  $\Omega$ .

Donc  $(F \cap N)$ ,  $(F \cap A)$  et  $(F \cap G)$  forment une partition de F. Par suite :

$$p_2 = P(F) = P(F \cap N) + P(F \cap A) + P(F \cap G)$$

$$p_2 = P_N(F) \times P(N) + P_A(F) \times P(A) + P_G(F) \times P(G)$$

$$p_2 = \frac{80}{300} \times \frac{45}{100} + \frac{95}{300} \times \frac{20}{100} + \frac{125}{300} \times \frac{68}{100}$$

$$p_2 = \frac{7}{15} \text{ valeur exacte.}$$

Donc  $p_2 \approx 0,467$  valeur approchée.



4°) On choisit au hasard une fille. On restreint l'univers à F.

Donc on sait déjà que l'inscrit choisi est une fille, et on veut calculer la probabilité  $p_3$  qu'elle pratique l'athlétisme. Donc :  $p_3 = P_F(A)$ . On revient à la définition :

$$p_3 = P_F(A) = \frac{P(F \cap A)}{P(F)}$$

$$p_3 = \frac{19}{300} \times \frac{15}{7} \quad (\text{pour diviser par une fraction, on multiplie par son inverse})$$

$$p_3 = \frac{19}{140} \quad \text{valeur exacte}$$

$$p_3 \approx 0,136 \quad \text{valeur approchée.}$$

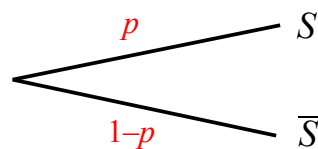
CQFD

## IV. Épreuve de Bernoulli. Loi binomiale. (Rappels de 1ère ES)

### 4.1) Épreuve de Bernoulli

On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire à deux issues : l'une qu'on appelle  $S$  pour « Succès » avec une probabilité  $p = P(S)$  ; et l'autre, l'événement contraire noté  $\bar{S}$ , qu'on appelle « Échec » avec une probabilité  $1-p$ .

On dit « épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$  »  $p = \text{probabilité du succès}$ .



On définit la variable aléatoire  $X$  qui prend la valeur 1 pour Succès et 0 pour Échec. On a alors :  $S = \ll X = 1 \gg$  et  $\bar{S} = \ll X = 0 \gg$ .  $X$  ainsi définie, donne « le nombre de succès » dans l'expérience.  $X$  s'appelle une loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(1, p)$  de paramètre  $p$ . La loi de probabilité de la v.a.  $X$  est donnée par :

Valeurs $x_k$	1	0
$p_k = P(X = x_k)$	$p$	$1-p$

L'espérance mathématique [la valeur moyenne] de  $X$  est donnée par :

$$E(X) = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n. \text{ Donc } E(X) = p \times 1 + (1-p) \times 0. \text{ D'où : } \boxed{E(X) = p}$$

### 4.1) Schéma de Bernoulli – Loi binomiale

On recommence  $n$  fois une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$ , dans les mêmes conditions et de façon indépendante – c'est-à-dire avec remise. On fait un arbre pondéré et obtient un schéma de Bernoulli.

On appelle  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de succès sur les  $n$  épreuves.

On obtient alors 0 succès, 1 succès, ... ou  $n$  succès. Donc  $X$  prend les valeurs :  $0; 1 ; 2 ; \dots ; n$ . On écrit :  $X(\Omega) = \{0; 1; 2; \dots; n\}$ .

On dit alors que  $X$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  de paramètres  $n$  et  $p$ .

La loi de probabilité de X est donnée par :

Valeurs de $k$	0	1	2	...	n
$p_k = P(X = k)$	$P(X=0)$	$P(X=1)$	$P(X=2)$	...	$P(X=n)$

Recherchons d'abord sur un exemple, comment trouver ces valeurs.

### 4.3) Étude d'un exemple modèle

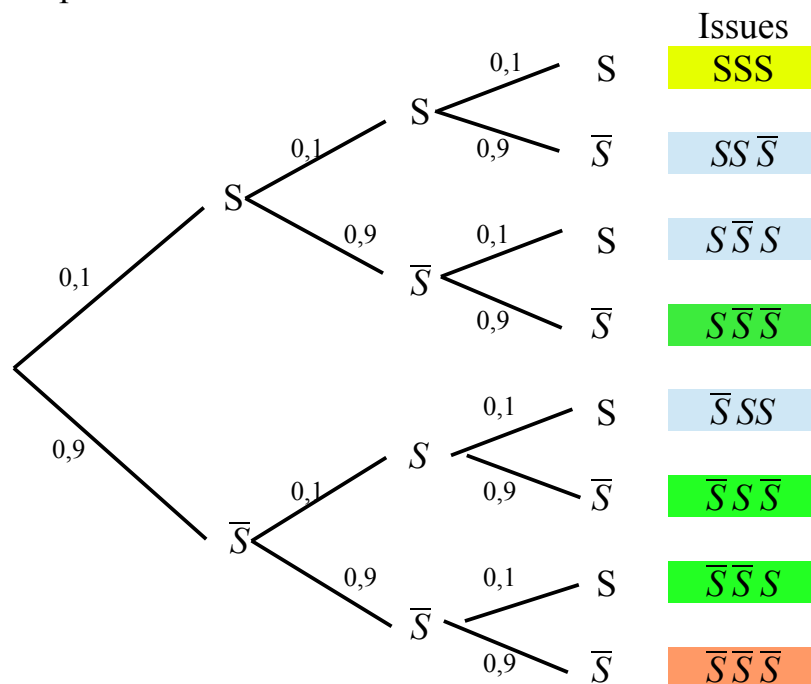
On considère un vivier (grand aquarium) de 100 poissons dont 10 brochets. Avec une épuisette, on prélève un (seul) poisson. On définit le **succès**  $S = \ll \text{le poisson prélevé est un brochet} \gg$ .  $P(S) = \frac{10}{100} = 0,1$ . Ainsi, l'échec  $\bar{S} = \ll \text{le poisson prélevé n'est pas un brochet} \gg$ .  $P(\bar{S}) = 1 - 0,1 = 0,9$ . On obtient une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p = 0,1$ .

On recommence 3 fois cette épreuve, dans les mêmes conditions et de façon indépendante – c'est-à-dire avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès sur les 3 épreuves. X suit la loi binomiale de paramètres  $n = 3$  et  $p = 0,1$ .

Calculer les probabilités des événements suivants :

- 1°)  $E_3 = "X=3" = \text{"obtenir 3 succès"} ;$
- 2°)  $E_1 = "X=1" = \text{"obtenir 1 succès"} ;$
- 3°)  $E_2 = "X=2" = \text{"obtenir 2 succès"} ;$
- 4°)  $E_0 = "X=0" = \text{"obtenir 0 succès"}.$

On construit un arbre pondéré. On obtient un schéma de Bernoulli.



1°) Calculons la probabilité de "X=3" = "obtenir 3 succès".

Il n'y a qu'un seul chemin correspondant à 3 succès. Donc :

« SSS » = « S<sub>1</sub> » et « S<sub>2</sub> » et « S<sub>3</sub> »

= « obtenir un succès au premier tirage » et « un succès au 2ème tirage »  
et « un succès au 3ème tirage ».

$$\text{Donc : } P(X=3) = P(SSS) = p \times p \times p$$
$$\text{donc : } P(X=3) = p^3 = 1p^3(1-p)^0$$

1 = nombre de chemins

$p^3$  = proba de 3 succès

$(1-p)^0$  = probabilité de 0 échecs.

2°) Calculons la probabilité de "X=1" = "obtenir 1 succès".

Il y a trois chemins correspondant à 1 succès (= 2 échecs). [Le succès peut se positionner en premier, au milieu ou en 3ème position]. Donc :

$$P(X=1) = P(S\bar{S}\bar{S} \text{ ou } \bar{S}S\bar{S} \text{ ou } \bar{S}\bar{S}S)$$
$$= p \times (1-p) \times (1-p) + (1-p) \times p \times (1-p) + (1-p) \times (1-p) \times p$$
$$P(X=1) = 3p(1-p)^2.$$

1 = nombre de chemins

$p^1$  = proba de 1 succès

$(1-p)^2$  = probabilité de 2 échecs.

3°) Calculons la probabilité de "X=2" = "obtenir 2 succès".

Il y a aussi trois chemins correspondant à 2 succès (= 1 échec). [L'échec peut se positionner en premier, au milieu ou en 3ème position]. Donc :

$$\text{Donc : } P(X=2) = 3p^2(1-p).$$

1 = nombre de chemins

$p^2$  = proba de 2 succès

$(1-p) = (1-p)^1$  = probabilité de 1 échec.

4°) Calculons la probabilité de "X=0" = "obtenir 0 succès".

Il n'y a qu'un seul chemin correspondant à 0 succès (= 3 échecs).

$$\text{Donc : } P(X=0) = (1-p)^3 = 1p^0(1-p)^3.$$

1 = nombre de chemins

$p^0$  = proba de 0 succès

$(1-p)^3$  = probabilité de 3 échecs.

Conclusion :  $P(k \text{ succès}) = \text{Nombre de chemins} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$ .

Le nombre de chemins qui aboutissent à k succès, se note  $\binom{n}{k}$  et s'appelle le

coefficient binomial «k parmi n». Ce qui donne :

$$P(\text{"k succès"}) = P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

On revient à notre exemple. Si  $n = 3$  et  $p = 0,1$ , on obtient la loi de probabilité de  $X$  :

Valeurs de $k$	0	1	2	3
$p_k = P(X = k)$	0,729	0,243	0,027	0,001

#### 4.4) Espérance de la loi binomiale

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . Alors :

**L'espérance mathématique** [**la valeur moyenne**] de  $X$  est donnée par :


$$E(X) = np$$

#### 4.5) Utilisation de la calculatrice

##### a) Calcul d'une probabilité "ponctuelle"

Toutes ces valeurs sont données par les calculatrices avec les instructions **BinomFdp** ou **Binompdf** ou **Bpd** ou **Binomial pdf** ou encore **Binomiale DdP**...voir ci-dessous.

**Exemple** : Nous choisissons ici une v.a.  $X$  qui suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(10 ; 0.3)$ .

Casio : Graph 35+ et modèles sup.	Texas : TI82 Stats et modèles sup.
<p><b>Calcul des probabilités <math>P(X=k)</math></b>            Menu ► <b>STAT</b> ► <b>DIST</b> ► <b>BINM</b> ► <b>BPD</b>  <b>Pour calculer <math>P(X=2)</math></b>  <b>Binomial P.D.</b>  <b>Data</b> : <b>Variable</b>                      Choisir ici « Variable »  <b>x</b> : <b>2</b> Placer ici la valeur de <math>k</math>  <b>Numtrial</b> : <b>10</b> Placer ici la valeur de <math>n</math>  <b>P</b> : <b>0.3</b> Placer ici la valeur de <math>p</math>  <b>Save Res</b> : <b>None</b>  <b>Execute</b>  <b>CALC</b> Pour calculer, appuyer sur <b>F1</b>            Après exécution on obtient :  <b>Binomial P.D</b>  <b>P=0.23347444</b></p>	<p><b>Calcul des probabilités <math>P(X=k)</math></b>            Menu ► <b>2nd DISTR</b> (ou ► <b>Distrib</b>)    <b>Pour calculer <math>P(X=2)</math></b>            Menu ► <b>2nd DISTR</b> ► <b>Binompdf</b>            ou ► <b>BinomFdp</b> (version fr)            Compléter les paramètres : <math>n, p, k</math>  <b>Binompdf(10,0.3, 2)</b>            Après exécution on obtient :  <b>0.2334744405</b></p>

### b) Calcul des probabilités "cumulées"

La probabilité pour « **obtenir au plus k succès** » =  $P(X \leq k)$

C'est une « **probabilité cumulée croissante** », c'est-à-dire :

$$P(X \leq k) = P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=k)$$

Cette valeur est aussi donnée directement par les calculatrices avec **Binomcdf** ou **BinomFrép** ou **Bcd** ou **Binomial Cdf** ou encore **Binomiale FdR** ... voir ci-dessous. Vous remarquerez au passage le "**p**" pour proba. ponctuelle et le "**c**" pour probabilité cumulée.

### c) Calcul direct de toutes les probabilités "ponctuelles" : Loi de probabilité

Aller dans ► **f(x) =** ou ► **Y =** et rentrer directement les fonctions **en remplaçant k par X** :

**Y1 =** ► 2nde Distrib **Binompdf(n,p,X)** fdp ou pdf comme fct de distribution de proba.

**Y2 =** ► 2nde Distrib **Binomcdf(n,p,X)** cdf ou fdc comme fct de distribution cumulée,...

ou

**Y1 =** ► 2nde Distrib **BinomFdp(n,p,X)** (version fr) et

**Y2 =** ► 2nde Distrib **BinomFrép(n,p,X)** (version fr) avec les valeurs exactes de **n** et **p**. Puis

► 2nde **TABLE** pour **afficher le tableau de valeurs**.

The first screenshot shows the calculator screen with the following input:   
 Plot1 Plot2 Plot3  
 \Y1=binompdf(10,  
 0.3,X)  
 \Y2=binomcdf(10,  
 0.3,X)  
 \Y3=  
 \Y4=  
 \Y5=

The second screenshot shows the table for Y1 with the following data:   

X	Y1	Y2
0	.02825	.02825
1	.12106	.14931
2	.23347	.38278
3	.26683	.64961
4	.20012	.84973
5	.10292	.95265
6	.03676	.98941

 Y1=.2334744405

The third screenshot shows the table for Y2 with the following data:   

X	Y1	Y2
1	.12106	.14931
2	.23347	.38278
3	.26683	.64961
4	.20012	.84973
5	.10292	.95265
6	.03676	.98941
7	.009	.99841

 Y2=.9984096136

**Y1 et Y2 rentrées**                      **P(X=2)=0,2334744405**                      **P(X ≤ 7)=0,9984096136**

**Attention !** Si la machine affiche **ERROR** dans Y1, il faut aller dans ► 2nde **TableSet** ou ► 2nde **Déf Table** pour redéfinir le pas : **commencer à 0** et définir **un pas égal à 1**.

X	Y1	Y2
0	.02825	.02825
.5	ERROR	.02825
1	.12106	.14931
1.5	ERROR	.14931

### Remarques

La probabilité « **pour obtenir au moins k succès** » =  $P(X \geq k)$  , c'est aussi une « **probabilité cumulée décroissante** », c'est-à-dire :

$$P(X \geq k) = P(X=k) + P(X=k+1) + \dots + P(X=n)$$

**Attention !** Ces valeurs cumulées décroissantes **ne sont pas** données par les calculatrices. Cependant, si on veut utiliser les calculatrices, on peut utiliser l'événement contraire : Donc :  $P(X \geq k) = 1 - P(X < k) = 1 - P(X \leq k-1)$  .

Attention aux symboles « **inférieur** » et « **inférieur ou égal** ».

### c) Calcul des coefficients binomiaux

Nous choisissons ici une v.a.  $X$  qui suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(10 ; 0.3)$ .

<i>Casio : Graph 35+ et modèles sup.</i>	<i>Texas : TI82 Stats et modèles sup.</i>
<p><u>Calcul des coefficients binomiaux</u> Dans le Menu <b>RUN</b>, appuyer sur la touche <b>OPTN</b>, puis choisir <b>PROB</b>. <b>Pour calculer</b> <math>\binom{10}{3}</math> , taper <b>10</b>, puis choisir <b>nCr</b>, puis taper <b>3</b> et <b>EXE</b>.</p>	<p><u>Calcul des coefficients binomiaux</u> <b>Pour calculer</b> <math>\binom{10}{3}</math> , taper <b>10</b>, puis appuyer sur la touche <b>MATH</b>, choisir le menu <b>PRB</b>, puis choisir <b>nCr</b> ou <b>Combinaison</b> (version fr), puis taper <b>3</b> et <b>ENTER</b>.</p>

*A VOUS DE JOUER*