Notion de continuité sur un intervalle

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES	
Notion de continuité sur un intervalle	• Exploiter le tableau de variation pour déterminer : — le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = k$; — le signe d'une fonction.	On se limite à une approche intuitive et on admet que les fonctions usuelles sont continues par intervalle. La propriété des valeurs intermédiaires est présentée graphiquement; on convient que les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré. On admet qu'une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.	

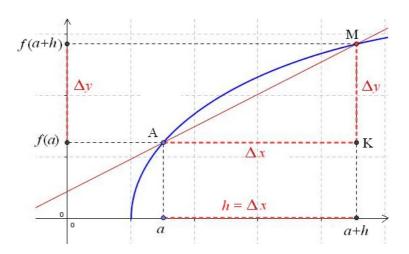
I. Notion de dérivée et tangente à une courbe en un point

1.1) Taux d'accroissement

Définition 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et $a \in I$. Soit h un nombre réel non nul tel que $a+h \in I$. On appelle taux d'accroissment de la fonction f entre a et a+h, le nombre réel $\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. (Lire tau de h).

C'est le *coefficient directeur* de la droite (AM) où A(a, f(a)) et M(a+h, f(a+h)).



Exemple 1.

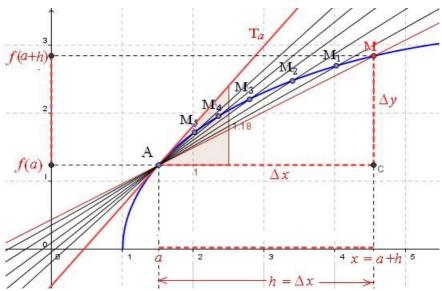
Le taux d'accroissement de la fonction $f: x \to x^2$ entre 1 et 1+h est donné par :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

1.2) Nombre dérivé en un point

Lorsque h prend des valeurs h_1 , h_2 , h_3 ,... « de plus en plus proches » de 0, le point M prend successivement les positions M_1 , M_2 , M_3 ,...et a+h prend des valeurs « de plus en plus proches » de a; les droites (AM₁), (AM₂), (AM₃),.... tendent vers une position limite : la droite tanagente à la courbe au point d'abscisse a.

Le coefficient directeur de cette droite s'appelle le nombre dérivé de la fonction au point d'abscisse a et se note f'(a).



Définition 3.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et $a \in I$. On dit que la fonction f est dérivable en a si le taux d'accroissement de f entre a et a+h tend vers un *nombre réel fini*, noté f'(a), lorsque h tend vers 0 et on écrit :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} .$$

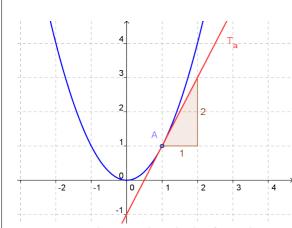
Le nombre f'(a) s'appelle le nombre dérivé de f en a désigne le coefficient directeur de la droite tangente à la courbe au point d'abscisse a. (à connaître par♥)

Exemple 2.

Pour la fonction $f: x \to x^2$ vue ci-dessus, nous avons :

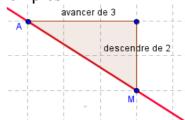
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} (2+h) = 2 \in \mathbb{R}$$
 Donc la fonction $f: x\to x^2$ est dérivable en 1 et $f'(1)=2$.

Donc le coefficient directeur de la droite tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est égal à $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$ qu'on peut écrire : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1}$. Ce qui signifie que, grapghiquement, à partir du point A(1;1), j'avance de 1 parallèlement à l'axe des abscisses et je monte de 2 parallèlement à l'axe des ordonnées, puis je trace la droite tangente T_a pour a = 1.



Tangente à la courbe de la fonction $f: x \to x^2$ au point d'abscisse a = 1. $f'(1)=2=\frac{2}{1}$

Autre exemples



J'avance de 3 parallèlement à l'axe des abscisses ($\Delta x = +3$) et je descends de 2 parallèlement à l'axe des ordonnées ($\Delta y = -2$), donc le coefficient directeur de la droite tangente T_a est : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{3}$. Donc $f'(a) = \frac{-2}{3}$

1.2) Équation de la droite tangente

Théorème 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et $a \in I$. Si f est dérivable en a et a pour nombre dérivé f'(a), alors : la droite \mathbf{T}_a passant par le point A(a, f(a)) et de coefficient directeur f'(a), est **tangente à la courbe** \mathbf{C}_f au point A. Son équation est donnée par : \mathbf{T}_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)

Exemple 3.

Nous avons vu que la fonction $f: x \to x^2$ est dérivable en 1 et f'(1) = 2.

Soit $A(1, f(1)) \in C_f$. On a donc f(1) = 1 et f'(1) = 2.

<u>lère méthode</u> : (directe ; j'utilise la formule de l'équation de la tangente)

L'équation de la droite tangente T_1 à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est donnée par : y = f'(1)(x-1) + f(1) donc y = 2(x-1) + 1 donc y = 2x-2+1 .

<u>Conclusion</u>: L'équation de la droite T_1 tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est : y=2x-1 . CQFD

<u>2ème méthode</u> : (longue)

La droite T_1 tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1, a pour équation : y = mx + p, où m est le coefficient directeur, donc : m = f'(1) = 2 et p est l'ordonnée à l'origine.

Ainsi, l'équation de T_1 est de la forme : y = 2x+p.

De plus T_1 passe par le point A(1;1). Donc : $1=2\times 1+p$.

On obtient ainsi : 1 = 2+p, donc : p = 1-2. D'où p = -1.

<u>Conclusion</u>: L'équation de la droite T_1 tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est : y=2x-1 . CQFD

II. Fonctions dérivées

2.1) Fonction dérivée

Définition 4.

On dit qu'une fonction f est dérivable sur l'intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout nombre $x \in I$. On définit ainsi une nouvelle fonction sur I, notée f ' qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé f'(x).

f's'appelle *la fonction dérivée de f* sur l'intervalle I.

Remarque: Graphiquement, on reconnaît une fonction dérivable sur un intervalle I lorsque sa courbe est tracée en <u>un seule morceau</u> sur I <u>et</u> est bien *arrondie* (*parfaitement lisse*), c'est-à-dire ne présente <u>aucun point angulaire</u> sur I.

2.2) Dérivées des fonctions usuelles

Théorème 2. Dérivées des fonctions usuelles:

Soient f, u et v trois fonction définies sur un intervalle I et dérivables sur D. Alors :

Fonction	$\mathbf{D}_{\!f}$	Dérivée	$\mathbf{D}_{\!f'}$
f(x) = k	IR	f'(x) = 0	IR
f(x) = x	IR	f'(x) = 0 $f(x) = 1$	I R
$f(x) = x^2$	IR	f(x) = 2x	IR
$f(x) = x^3$	IR	$f(x) = 3x^2,$	IR
$f(x) = x^n$	IR	$f(x) = n x^{n-1}$	I R
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$]0;+∞[
$f(x) = \frac{1}{x}$	R\{0}	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	IR\{0}

2.3) Dérivées de certaines fonctions composées

Théorème 3. Dérivées des fonctions composées :

Soient u et v deux fonction définies et dérivables sur un même intervalle I de \mathbb{R} , k un nombre réel et n un nombre entier. Alors :

a)
$$(u+v)' = u'+v'$$

b)
$$(k u)' = k u'$$
.

c)
$$(uv)' = u'v + uv'$$

d)
$$(u^2)'=2u'\times u$$

e)
$$(u^3)' = 3u' \times u^2$$

f)
$$(u^n)' = n u' \times u^{n-1}$$
 (non exigible)

$$g) \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$h) \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$

Exemples:

- On dérive terme à terme une somme ou une différence.

Si
$$f(x)=5x^2+3x+7$$
, alors $f'(x)=5\times 2x+3\times 1+0$. Donc $f'(x)=10x+3$.

– Dans un produit, on dérive chaque facteur à son tour en gardant l'autre intact, puis on fait la somme : si $f(x)=x^2(5x+3)$, on peut développer puis utiliser la méthode directe précédente : $f(x)=5x^3+3x^2$. Donc $f'(x)=5\times3x^2+3\times2x$. Et par suite : $f'(x)=15x^2+6x$.

On peut aussi utiliser la formule de dérivation d'un produit : (uv)'=u'v+uv'.

$$f'(x)=2x(5x+3)+x^2\times 5$$
. Ce qui donne $f'(x)=10x^2+6x+5x^2$. Donc:

$$f'(x)=15x^2+6x$$
.

2.4) Propriétés des fonctions dérivables

Théorème 4.

- 1°) *Toute fonction polynôme est dérivable* sur tout intervalle contenu dans \mathbb{R} .
- 2°) Toute *fonction rationnelle* (*quotient de deux fonctions polynômes*) est dérivable sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.

Exemples:

ex 1°) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} de la manière suivante :

$$f(x)=x^3-5x^2+7x+5$$
, f est une fonction polynôme définie sur \mathbb{R} .

Donc f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2 - 5 \times 2x + 7 \times 1 + 0$. Donc :

$$f'(x)=3x^2-10x+7.$$

ex 2°) Soit g la fonction définie de la manière suivante : $g(x) = \frac{5x^2 + 3}{x - 2}$.

On cherche le domaine de définition :

$$x \in D_g$$
 (ssi) $g(x)$ existe (ssi) $x-2 \neq 0$ (ssi) $x \neq 2$.

Par conséquent : $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

La fonction g est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur tout intervalle contenu dans son domaine de définition et pour tout $x \in D_g$: $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec :

$$u(x)=5x^2+3$$
 done $u'(x)=10x$;
et $v(x)=x-2$ done $v'(x)=1$.
Done: $g'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{[v(x)]^2}$

Donc: $g'(x) = \frac{10x(x-2) - (5x^2+3) \times 1}{(x-2)^2}$ et par suite: $g'(x) = \frac{5x^2 - 20x - 3}{(x-2)^2}$.

2.5) Sens de variation et dérivée.

Pour connaître le sens de variation d'une fonction, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée sur son intervalle de définition.

Théorème 4.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} . Alors :

1°) Si pour tout $x \in I$: f'(x) > 0, alors f est <u>strictement croissante sur I.</u>

2°) Si pour tout $x \in I$: f'(x) < 0, alors f est <u>strictement décroissante sur I</u>.

3°) Si pour tout $x \in I$: f'(x)=0, alors f est <u>constante sur I</u>.

Exemple:

1°) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x)=x^2-6x+5$.

f est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : f'(x) = 2x - 6.

On résout d'abord l'équation : f'(x)=0, puis l'inéquation f'(x)>0.

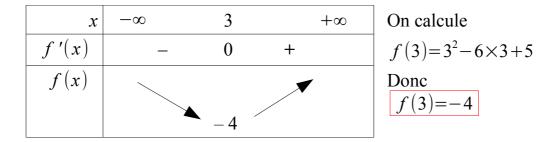
f'(x)=0 (ssi) 2x-6=0 (ssi) 2x>6 (ssi) x=3. Donc la dérivée s'annule en 3. f'(x)>0 (ssi) 2x-6>0 (ssi) 2x>6 (ssi) x>3.

On en déduit immédiatement que : f'(x) < 0 (ssi) x < 3.

Par conséquent,

- Si x < 3, la dérivée f' est strictement négative, donc f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty$; 3[.
- Si x > 3, la dérivée f' est strictement positive, donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[3, +\infty]$.

On dresse alors <u>le tableau de variation</u> de la fonction f sur \mathbb{R} :



2.5) Extremums locaux

Définitions : Dire qu'une fonction f admet un <u>extremum local</u> s'il existe une valeur a et un intervalle ouvert J contenu dans I tel que $a \in J$ et f admet <u>un minimum</u> ou <u>un maximum</u> sur J en a. C'est-à-dire :

- pour tout $x \in J$: $f(x) \le f(a)$ [f(a) est un maximum local]
- ou pour tout $x \in J$: $f(x) \ge f(a)$ [f(a) est un minimum local].

Théorème 5.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} et $a \in I$. Alors :

- 1°) Si la fonction f admet un extremum local en a, alors f'(a) = 0.
- 2°) Si la dérivée s'annule en *a <u>en changeant de signe</u>* alors, la fonction f admet un extremum local en *a*.

Exemple:

1°) Soit f la fonction [Ex. ci-dessus] définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

On a vu que f'(3) = 0 et f' change de signe en 3. Donc f admet un extremum en 3.

Dans cet exemple, il s'agit d'un minimum global.

```
f décroissante puis croissante => f admet un minimum local. f croissante puis décroissante => f admet un maximum local.
```

Remarque: La condition f'(a) = 0 n'est pas suffisante pour uvoir un extremum en a.

Exemple: la fonction f définie par : $f(x) = x^3$ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2$. La dérivée s'annule en 0, mais ne change pas de signe en 0. La fonction f n'admet pas d'extremum sur \mathbb{R} .

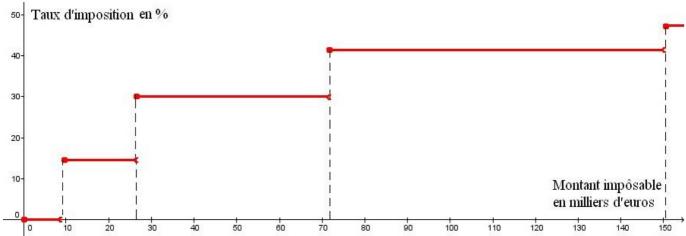
III. Notion de continuité d'une fonction

3.1) Étude d'un exemple

Le taux d'imposition des ménages, en 2015, est organisé en cinq tranches :



Si on trace la courbe de ces taux d'imposition, on obtient une ligne brisée, discontinue.



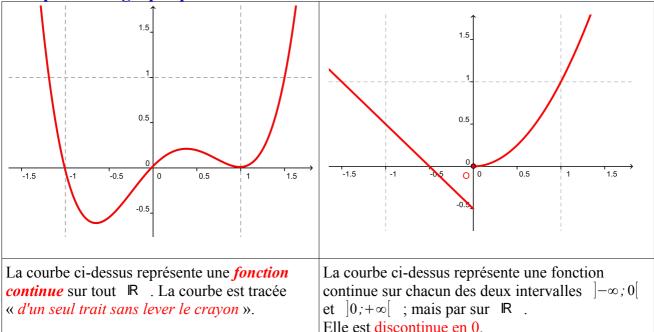
3.2) Continuité sur un intervalle

<u>Définition</u> : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan. On dit que la fonction f est *continue sur l'intervalle I* lorsqu'*on peut tracer sa courbe C_f sans lever le crayon*.

Exemples: Parmi les fonctions de référence, les fonctions constantes, les fonctions affines, les fonctions du second degré, et toutes les *fonctions polynômes* sont définies et continues sur tout \mathbb{R} , donc sur tout intervalle de \mathbb{R} .

La fonction <u>racine carrée</u> est continue sur $[0;+\infty[$. La fonction inverse est continue sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$. Elle n'est pas définie en 0. On ne peut donc pas parler de continuité en 0.





<u>Définition 2bis.</u>: Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que la fonction f est discontinue sur l'intervalle I si, et seulement si, il existe au moins un point $a \in I$ où f n'est pas continue.

<u>Exemples fondamentaux</u>: Trois types de fonctions continues sont donnés par les théorèmes suivants:

<u>Théorème 1.</u> Toutes les fonctions *polynômes* sont définies et *continues* sur tout \mathbb{R} , donc sur tout intervalle I de \mathbb{R} .

Théorème 2. Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle

<u>Théorème 3.</u>: Toute fonction *composée* de fonctions continues [citées ci-dessus], sur un intervalle est *continue* sur cet intervalle.

Exemple très important : Toute fonction rationnelle [quotient de deux fonctions polynômes] est définie et continue **sur chacun** des ses intervalles de définition.

Soit f la fonction définie de la manière suivante : $g(x) = \frac{5x^2+3}{x-2}$.

f est une fonction rationnelle, donc elle est continue sur chacun de ses intervalles de définition : $]-\infty$; 2 [et]2; $+\infty$].

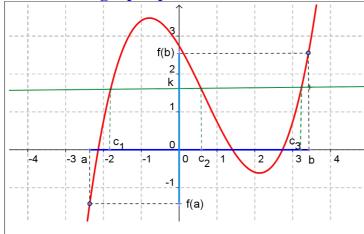
3.3) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4. (T.v.i.): Soit f une fonction <u>définie et continue</u> sur un intervalle [a,b]. Alors pour tout nombre réel k compris entre f(a) et f(b), il existe <u>au moins</u> un réel $c \in [a;b]$ tel que f(c) = k.

On dit que toutes les *valeurs intermédiaires* comprises entre f(a) et f(b) sont *atteintes* au moins une fois par la fonction f.

Remarque: On n'a pas parlé de l'intervalle [f(a); f(b)], ni de [f(b); f(a)] car, pour l'instant, on ne sait pas a priori, laquelle des deux valeurs est plus grande que l'autre.

Illustration graphique



Dans notre cas de figure, selon la position de k dans l'intervalle [f(a); f(b)], il existe *une*, *deux* ou *trois* valeurs de $c \in [a;b]$ telles que f(c) = k.

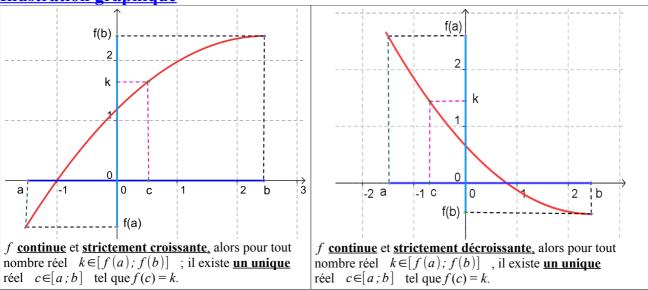
Par conséquent, dans ce cas général, il existe <u>au moins</u> un $c \in [a;b]$ tel que f(c) = k.

Un *corollaire* est une conséquence directe et immédiate du théorème précédent. En général, c'est une version du théorème dans un cas particulier.

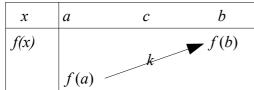
<u>Corollaire n°1</u> (du T.v.i.): Soit f une fonction <u>définie et continue</u> et <u>strictement</u> <u>croissante</u> (resp. <u>strictement décroissante</u>) sur un intervalle [a,b]. Alors pour tout nombre réel $k \in [f(a); f(b)]$ (resp. $k \in [f(b); f(a)]$), il existe <u>un unique</u> réel $c \in [a;b]$ tel que f(c) = k.

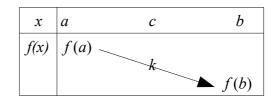
On dit que toutes les *valeurs intermédiaires* entre f(a) et f(b) sont <u>atteintes</u> <u>exactement une fois</u> par la fonction f.

Illustration graphique



Avec les tableaux de variations





Cas particulier k = 0

Corollaire n°2 (du T.v.i.) : Soit f une fonction <u>définie et continue</u> et <u>strictement</u> <u>croissante</u> (resp. <u>strictement décroissante</u>) sur un intervalle [a,b] et telle que $f(a) \times f(b) < 0$, il existe <u>un unique</u> réel $c \in [a;b]$ tel que f(c) = 0.

Ce corollaire est une conséquence immédiate du corollaire n°1. En effet, il suffit de prendre k = 0 dans le corollaire n°1.

Dire que $f(a) \times f(b) < 0$ signifie que f(a) et f(b) sont de signes contraires f(a) et f(b) et f(b) sont de signes contraires f(a) et f(b) et

3.4) Application du T.v.i. à la résolution d'équations f(x) = k