Chapitre 01

Suites géométriques

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Suites géométriques.	Reconnaître et exploiter une suite géométrique dans une situation donnée. Connaître la formule donnant $1 + q + \ldots + q^n$ avec $q \neq 1$.	
Limite de la suite (q^n), q étant un nombre réel strictement positif.	Déterminer la limite d'une suite géométrique de raison strictement positive. Étant donné une suite (q^n) avec $0 < q < 1$, mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel q^n est inférieur à un réel a positif donné.	Le tableur, les logiciels de géométrie dynamique et de calcul sont des outils adaptés à l'étude des suites, en particulier pour une approche expérimentale de la notion de limite. On détermine, sans soulever de difficulté, la limite de la somme $1+ q +\ldots+ q^n$ quand $0 < q < 1$. Le comportement lorsque n tend vers $+\infty$ de la somme des n premiers termes de certaines suites géométriques fournit un exemple de suite croissante n'ayant pas pour limite $+\infty$. On évoque les aspects historiques et philosophiques de cette question en présentant quelques paradoxes classiques.
Suites arithmético-géométriques.	Traduire une situation donnée à l'aide d'une suite arithmético-géométrique.	Toute indication doit être donnée dans l'étude des suites arithmético-géométriques.

1. Suites géométriques

1.1) Suites géométriques définies par récurrence

<u>Définition 1.</u> :

Soit q un nombre réel <u>donné</u>. On dit qu'une suite (v_n) est une *suite géométrique de raison q*, lorsqu'on donne son premier terme v_0 et chaque terme s'obtient en multipliant le terme précédent par q.
Autrement dit : $v_0 \in \mathbb{R}$ est donné et pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = v_n \times q = q\, v_n$.

Si le terme initial est v_0.

$$v_0 \xrightarrow{\times q} v_1 \xrightarrow{\times q} v_2 \xrightarrow{\times q} v_3 \cdots v_n \xrightarrow{\times q} v_{n+1}$$

Si la suite commence au rang 1, on commence à partir de v_1.

<u>Exemple</u> : La suite définie par $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 2 \times v_n \end{cases}$ est une s.g. telle que $v_0 = 3$ et $q = 2$.

Calculons les 2 termes suivants :
Le 2ème terme : $\boldsymbol{v_1} = v_0 \times q = 3 \times 2 = \mathbf{6}$. Le troisième terme $\boldsymbol{v_2} = v_1 \times q = 6 \times 2 = \mathbf{12}$.

Comment démontrer qu'une suite est géométrique ?

Il suffit de calculer et de montrer que le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n} = Constante$

(càd indépendante de *n*). Cette constante est la raison de la suite géométrique (v_n).

1.2) Définition explicite d'une suite géométrique

Théorème :

Soit q un nombre réel donné. Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.

(P_1) : pour tout entier $n \geqslant 0$: $v_n = v_0 \times q^n = v_0 q^n$

(P_2) : pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = v_1 \times q^{(n-1)} = v_1 q^{n-1}$

(P_3) : pour tous entiers $n \geqslant 0$ et : $p \geqslant 0$: $v_n = v_p \times q^{(n-p)} = v_p q^{n-p}$

Exemple : La suite définie par $\begin{cases} v_0 = 0{,}5 \\ v_{n+1} = 2 \times v_n \end{cases}$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 0{,}5$ et de raison $q = 2$. Calculons v_{10} et v_{15} :

Cette suite commence au rang 0. On utilise la formule $v_n = v_0\, q$. Donc :
$\boldsymbol{v_{10}} = v_0 \times q^{10} = 0{,}5 \times 2^{10} = 0{,}5 \times 1024 = \mathbf{512}$ et $\boldsymbol{v_{15}} = v_0 \times q^{15} = 0{,}5 \times 2^{15} = \mathbf{16384}$.

1.3) Sens de variation et représentation graphique

On peut calculer la différence : $v_{n+1} - v_n = v_0 q^{n+1} - v_0 q^n = v_0 q^n (q-1)$.

Donc le sens de variation d'une suite géométrique (v_n) dépend du signe de q et de la position de q par rapport à 1.

Théorème 1:

Soit q un nombre réel donné. Alors le sens de variation de la suite géométrique (q^n) de raison q et de premier terme 1 est donné par :

- La suite (q^n) est constante si et seulement si : $\boldsymbol{q = 1}$.
- La suite (q^n) est croissante si et seulement si : $\boldsymbol{q > 1}$.
- La suite (q^n) est décroissante si et seulement si : $0 < \boldsymbol{q < 1}$.
- La suite (q^n) n'est ni croissante , ni décroissante si et seulement si : $\boldsymbol{q < 0}$.

Dans les trois cas, la représentation graphique de la suite est un ensemble de points d'ordonnée à l'origine v_0.

Si le 1er terme est positif,

- Lorsqu'on multiplie par un nombre ***q supérieur à 1***, on obtient un ***agrandissement. => Suite croissante***
- Si ***q est compris entre 0 et 1***, on obtient une ***réduction => Suite décroissante***
- Si on multiplie par un nombre négatif, on change de signe, et si on recommence, on rechange de signe, La suite alterne « *terme positif, terme*

négatif » => ***Suite ni croissante, ni décroissante.***

Théorème 2 :

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0. Alors $v_n = v_0 q^n$:

- Si $v_0 > 0$, alors la suite (v_n) varie dans le même sens que la suite (q^n).
- Si $v_0 < 0$, alors la suite (v_n) varie dans le sens contraire que la suite (q^n).

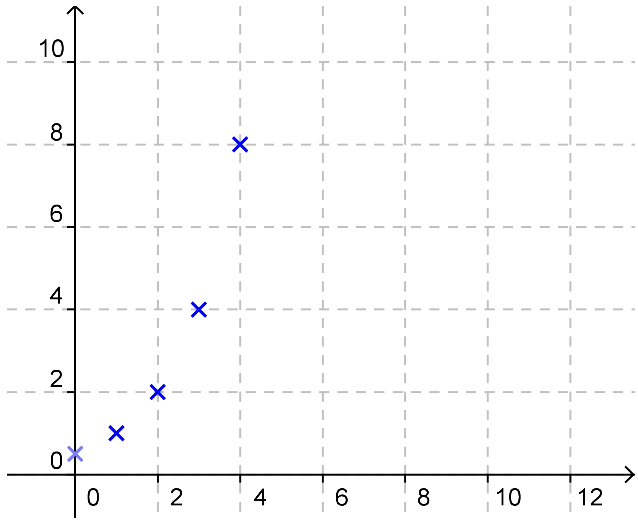
Exemple : Étudier le sens de variation de la suite (un) définie par : $\begin{cases} v_0 = 0{,}5 \\ v_{n+1} = 2\,v_n \end{cases}$

et la représenter dans un repère (O ; I ; J).

Tout d'abord, il s'agit d'une suite géométrique de premier terme $v_0 = 0{,}5$ et de raison $q = 2$.

Le premier terme $v_0 = 0{,}5$ est positif et la raison $q > 1$, donc la suite est strictement croissante.

Sa représentation graphique est est l'ensemble de points de la figure ci-contre.



1.4) Application

Exemple 1 : En 2010, Vincent dépose 3500 euros à la Caisse d'Épargne à un taux d'*intérêts composés* de 5% par an. [*Chaque année, les intérêts obtenus s'ajoutent au capital et engendrent d'autres intérêts l'année suivante*].
Calculer le montant dont il disposera après un an, deux ans et au bout de 8 ans.

On appelle C_n le capital disponible à la fin de la n$^{\text{ème}}$ année. Chaque année, les intérêts sont calculés sur le montant du capital disponible.

$C_1 = C_0 + 5\%C_0 = (1 + 0{,}05) \times C_0 = 1{,}05 \times 3500 = \mathbf{3675}$ € en 2011.
$C_2 = C_1 + 5\%C_1 = (1 + 0{,}05) \times C_1 = 1{,}05 \times 3675 = \mathbf{3858{,}75}$ € en 2012.
$C_3 = C_2 + 5\%C_2 = (1 + 0{,}05) \times C_2 = 1{,}05 \times 3858{,}75 = \mathbf{4051{,}69}$ € en 2013.

…

Le montant du capital disponible définit *une suite géométrique* (C_n) de premier terme $C_0 =$ 3500 et de raison $q = 1{,}05$. Donc, pour tout entier n, on a $C_{n+1} = 1{,}05 \times C_n$. Donc on peut utiliser la formule (P_1) pour trouver l'expression explicite de C_n en fonction de n.

$$C_n = C_0\,q^n = C_0 \times (1{,}05)^n$$

Pour la 8ème année, n = 8, on a :

$$C_8 = C_0\,q^8 = 3500 \times (1{,}05)^8 = \mathbf{5171{,}10\ €}$$

Conclusion : En 2018, Vincent disposera d'un montant de **5171,10** euros.

Exemple 2 : M. DAUTO a acheté une voiture en 2003 pour un montant de 18 000

euros. La valeur d'un véhicule diminue de 15% par an. [*Chaque année, le prix moyen des véhicules de la même année, diminue de 15%*].
Calculer la valeur résiduelle de la voiture de Vincent en 2012.

On appelle V_n la valeur de la voiture la n^{ème} année. Chaque année, la valeur du véhicule diminue de 15%. Donc

$V_1 = V_0 - 15\% V_0 = (1 - 0{,}15) \times V_0 = 0{,}85 \times 18\,000 =$ **15 300 €** en 2004.
$V_2 = V_1 - 15\% V_1 = (1 - 0{,}15) \times V_1 = 0{,}85 \times 15\,300 =$ **13 005 €** en 2005.
...
Le montant la valeur de la voiture définit *une suite géométrique* (V_n) de premier terme $V_0 =$ 18000 et de raison $q = 0{,}85$. Donc, pour tout entier n, on a $V_{n+1} = 0{,}85 \times V_n$. Donc on peut utiliser la formule (P_1) pour trouver l'expression explicite de C_n en fonction de n.

$$V_n = V_0\, q^n = V_0 \times (0{,}85)^n$$

[Calcul de n en 2012 :
On sait que V_0 correspond à 2003, donc V_1 correspond à 2004,... donc $n = 2012 - 2003 = 9$.]

En 2012, n = 9, et $V_9 = V_0\, q^9 = 18\,000 \times (0{,}85)^9 =$ **4169 €**

Conclusion : En 2012, la valeur résiduelle de la voiture de M. DAUTO est de **4169** euros.

1.5) Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété

La somme des puissances successives d'un nombre réel $q \neq 1$ s'écrit sous la forme :

$$(P_4) : \quad 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration :

Soit q un nombre réel $(q \neq 1)$.

On pose $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$, alors S_n est la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 1$ et de raison q.

On a alors $\qquad S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$

et, en multipliant par q : $\qquad qS_n = q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1}$

On retrouve (presque) les mêmes termes, mais décalés. On soustrait membre à membre et on obtient :

$$S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$$

Donc : $\qquad (1 - q) S_n = 1 - q^{n+1}$

Et comme $(q \neq 1)$, on a : $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

ou encore

$$S_n = \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

Exemple 1:

Calculer la somme $S=1+2+4+8+16+\cdots+256$.

Tout d'abord, on constate que S est la sommes des puissances de 2 jusqu'à $2^8 = 256$.

Donc : $S=1+2+4+8+16+\cdots+2^8$, avec $q = 2$. Il y a **9** termes !

D'après la formule de la somme des termes d'une suite géométrique, on a :

$$S=\frac{1-2^9}{1-2}=\frac{1-512}{-1}=511 \quad .$$

Cas général :

Propriété

Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme v_0. Alors pour tout n : $v_n = v_0 q^n$. La somme des (n+1) premiers termes de la suite (v_n) s'écrit sous la forme :

$$(P_5) : \quad S_n = v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n = \frac{v_0 \times (1-q^{n+1})}{1-q}$$

Démonstration :

Soit q un nombre réel $(q \neq 1)$. On pose $S_n = v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$.

On met en facteur v_0. Donc : $S_n = v_0+v_0 q+v_0 q^2+\cdots+v_0 q^n = v_0(1+q+q^2+\cdots+q^n)$

D'où le résultat.

Exemple 2: Calculer la somme $S=5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\cdots+\frac{5}{64}$.

On remarque que les dénominateurs sont des puissances de 2. Donc :

$$S=\frac{5}{2^0}+\frac{5}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{5}{2^6}=5\left(\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^6}\right)=5\left[\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]$$

Il y a 7 termes. Donc : $S=\dfrac{1-\frac{1}{2^7}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1-\frac{1}{128}}{\frac{1}{2}}=2\times\dfrac{127}{128}=\dfrac{127}{64}$.

2. Limites de suites géométriques

2.1) Théorèmes (admis) et définitions

Soit q un nombre réel donné.

1°) Si q > 1, alors multiplier par un nombre supérieur à 1 correspond à un agrandissement. Donc, les termes de la suite géométrique (q^n) augmentent indéfiniment lorsque n tend vers $+\infty$ et *dépassent tout nombre choisi au départ à partir d'un certain rang*. On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$$

On dit que « ***la limite de q^n lorsque n tend vers $+\infty$, est égale à $+\infty$*** ».

Remarques :
- Si on multiplie par *un premier terme $v_0 > 0$* , on obtient la même limite $+\infty$.
- Par contre, si on multiplie par *un premier terme $v_0 < 0$*, la limite est égale à $-\infty$.
- ***Si q = 1***, la suite est *constante*. Sa limite est aussi égale à 1.

2°) Si 0 < q < 1, alors multiplier par un nombre compris entre 0 et 1 correspond à une réduction. Donc, les termes de la suite géométrique (q^n) diminuent indéfiniment lorsque n tend vers $+\infty$ et *deviennent plus petits que n'importe quel nombre positif choisi au départ, aussi petit soit-il*. On dit que « *la limite de q^n lorsque n tend vers $+\infty$, est égale à 0* ». On écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n=0$$

Si on multiplie par *un premier terme v_0*, quel que soit son signe, on obtient la même limite **0**.

Définition :
Soit (u_n) une suite de nombres réels.
Si (u_n) tend vers *une limite finie*, on dit qu'elle est ***convergente***.
Si (u_n) tend vers *l'infini* ou *n'admet pas de limite*, on dit qu'elle est ***divergente***.

Exemples 1: Déterminer les limites lorsqu'elles existent, des suites suivantes :

1°) $u_{n+1}=0{,}99\,u_n$ avec $u_0 = -5$ 2°) $v_n=5\times(1{,}9)^n$ 3°) $w_n=\dfrac{-3^{n+1}}{2^n}$ 4°) $s_n=5-(0{,}7)^n$

1°) $u_{n+1}=0{,}99\,u_n$ et $u_0=5$.

(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0=5$ et de raison $q = 0{,}99$.
Comme $0 < q < 1$, la suite $(0{,}99)^n$ tend vers 0. En multipliant par tous les termes par 5, la limite ne change pas.
Conclusion : La suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$.

2°) $v_n=5\times(1{,}9)^n$

(v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0=5$ et de raison $q = 1{,}9$.
Comme $q > 1$, la suite $(1{,}9)^n$ tend vers $+\infty$. $\lim_{n\to+\infty}(1{,}9)^n=+\infty$
En multipliant par tous les termes par 5 > 0, la limite ne change pas de signe.
Conclusion : La suite (v_n) est divergente et $\lim_{n\to+\infty} 5\times(1{,}9)^n=+\infty$

3°) $w_n=\dfrac{-3^{n+1}}{2^n}$. Le terme général de la suite (w_n) peut s'écrire : $w_n=\dfrac{-3\times 3^n}{2^n}=-3\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

(w_n) est une suite géométrique de premier terme $w_0=-3$ et de raison $q=\dfrac{3}{2}$

Comme $q > 1$, la suite $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ tend vers $+\infty$. $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n=+\infty$
En multipliant par tous les termes par – 3, la limite change de signe.

Conclusion : La suite (w_n) est divergente et $\lim_{n\to+\infty} -5\times(1{,}9)^n = -\infty$

4°) $s_n = 5-(0{,}7)^n$

(s_n) est la somme d'un terme constant et d'une une suite géométrique de premier terme –1 et de raison q = 0,7.

Le terme constant (est indépendant de n, donc) ne varie pas, donc sa limite est égale à lui-même.

D'autre part, comme $0 < q < 1$, la suite $(0{,}7)^n$ tend vers 0 . Donc : $\lim_{n\to+\infty} -(0{,}7)^n = 0.$

Par conséquent, on a $\lim_{n\to+\infty} \left[5-(0{,}7)^n\right] = 5.$

Conclusion : La suite (s_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} s_n = 5-0 = 5.$

Exemple 2: La compagnie Mineral SA exploite un gisement de fer depuis 1990. La première année, la compagnie a extrait 100 000 tonnes de fer. Vu les difficultés d'extraction, l'exploitation du gisement diminue de 1% chaque année.
On appelle u_n le nombre de tonnes de fer extraites l'année (1990 + n).

1°) Montrer que u_1 = 99000 puis calculer u_2.

2°) Quelle est la nature de la suite (u_n). Justifier votre réponse.

3°) Donner l'expression explicite de u_n en fonction de n.

4°) Calculer le nombre de tonnes de fer extraites en 2011 arrondi à l'unité.

5°) Montrer que la quantité totale de fer extraite entre 1990 et l'année (1990 + n) est donnée par la formule :

$$S_n = \left(1-0{,}99^{n+1}\right)\times 10^7$$

6°) Calculer en millions de tonnes la quantité de fer que cette compagnie pourra extraire si l'exploitation continue indéfiniment dans ces mêmes conditions.

1°) On appelle u_n le nombre de tonnes de fer extraites l'année (1990 + n). Donc

$u_1 = u_0 - 1\% u_0 = (1-0{,}01) \times u_0 = 0{,}99 \times 100\,000 =$ **99000** en 1991.
$u_2 = u_1 - 1\% u_1 = (1-0{,}01) \times u_1 = 0{,}99 \times 99\,000 =$ **98010** en 1992.
et ainsi de suite...

2°) Le nombre de tonnes de fer u_{n+1} extraites l'année (1990 + n +1) s'obtient à partir de u_n en diminuant cette quantité de 1%, donc en multipliant par 0,99.
Ainsi, la suite (u_n) définit *une suite géométrique* de premier terme u_0= 100 000 et de raison q = 0,99. Donc, pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = 0{,}99 \times u_n$.

3°) D'après les propriétés des suites géométriques, on peut utiliser la formule (P_1) pour trouver l'expression explicite de u_n en fonction de n.

$$u_n = u_0\, q^n$$
$$u_n = 100\,000 \times (0{,}99)^n$$

4°) Pour calculer le nombre de tonnes de fer extraites en 2011, il faut d'abord calculer n :
On a : 1990 + n = 2011, donc n = 2011 – 1990. D'où : n = 21.
Maintenant, on calcule u_{21} . D'après la formule explicite de (u_n) on a :

$u_{21} = 100\,000 \times (0{,}99)^{21} = 80\,972{,}78...$

Conclusion : En 2011, la compagnie a extrait 80 973 tonnes de fer.

5°) De 1990 à 1990 + n, il y a (n +1) années. Il faut calculer la quantité totale de fer extraite pendant ces (n +1) années. Donc, il faut calculer la somme S_n des (n +1) premiers termes de la

suite géométrique (u_n).
D'après le cours, on sait que

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$S_n = \frac{u_0 \times (1 - q^{n+1})}{1 - q}$$
$$S_n = \frac{100000 \times (1 - 0{,}99^{n+1})}{1 - 0{,}99}$$
$$S_n = \frac{100000 \times (1 - 0{,}99^{n+1})}{0{,}01}$$

$$S_n = 100000 \times (1 - 0{,}99^{n+1}) \times 100$$

Donc :

$$S_n = (1 - 0{,}99^{n+1}) \times 10000000$$

Par conséquent : $S_n = (1 - 0{,}99^{n+1}) \times 10^7$.

6°) Pour calculer ***la quantité totale*** de fer que cette compagnie pourra extraire si l'exploitation continue indéfiniment dans ces mêmes conditions, il faut chercher la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Or, $0 < 0{,}99 < 1$ donc la suite géométrique $(0{,}99^n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

On a donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}99^n = 0$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}99 \times 0{,}99^n = 0$

Ce qui donne : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}99^{n+1} = 0$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - 0{,}99^{n+1}\right) = 1$

En multipliant par 10^7, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - 0{,}99^{n+1}\right) \times 10^7 = 10^7$

<u>**Conclusion**</u> : Si l'exploitation continue indéfiniment dans les mêmes conditions, la compagnie pourra extraire 10^7 = 10 millions de tonnes de fer de ce gisement.

3. Suites arithmético-géométriques

3.1) Définition

Soient a et b deux nombres réels <u>donnés</u>.
On définit une ***suite arithmético-géométrique*** (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par *la relation de récurrence* : $u_{n+1} = a u_n + b$ pour tout entier n.

On écrit : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{est donné} \\ u_{n+1} = a u_n + b \end{cases}$

La ***fonction associée*** à cette suite arithmético-géométrique est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = a x + b$.

<u>**Cas particuliers**</u>

① Si $\boldsymbol{a = 0}$, alors la suite (u_n) est *constante* et égale à b.

② Si $\boldsymbol{a = 1}$, alors la suite (u_n) est *arithmétique* de raison $r = b$.

③ Si $\boldsymbol{b = 0}$, alors la suite (u_n) est *géométrique* de raison $q = a$.

<u>**Exemple**</u> :

La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 2 \end{cases}$ est une suite arithmético-géométrique.

La ***fonction associée*** à cette suite arithmético-géométrique est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{2}x+2$.

Calcul des premières valeurs. $u_0=10$, $u_1=f(u_0)=\frac{1}{2}\times 10+2=7$

$u_2=f(u_1)=\frac{1}{2}\times 7+2=\frac{11}{2}=5{,}5$; $u_3=f(u_2)=\frac{1}{2}\times\frac{11}{2}+2=\frac{19}{4}=4{,}75$; ...

3.2) Représentation graphique

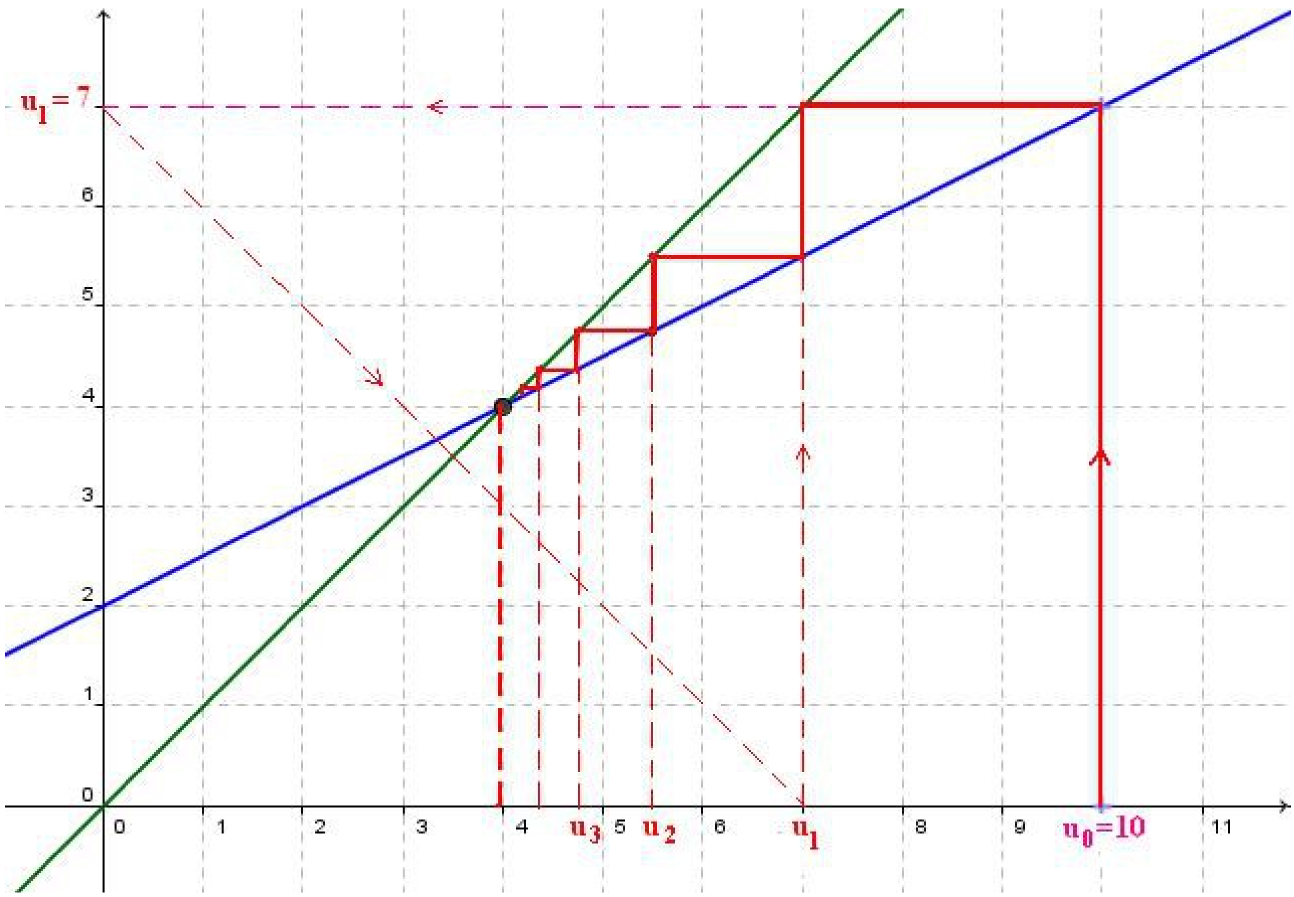
On se place dans ***un repère orthonormé*** (O ; I ; J) et on suit les étapes suivantes :
1ère étape : On construit la droite d, ***représentation graphique de la fonction affine f.*** Pour cela, il suffit de calculer les coordonnées de deux points :

- Pour $x = 0$, $y = 2$, donc le point $A(0;2)\in d$;
- Pour $x = 4$, $y = 4$, donc le point $B(4;4)\in d$.

De même, on construit la droite Δ d'équation « $y = x$ » qu'on appelle aussi ***la première bissectrice*** du repère.

2ème étape: On place u_0 sur l'axe des abscisses, puis $u_1=f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.

3ème étape: Afin de placer l'image de u_1, il faut replacer u_1 sur l'axe des abscisses. Pour cela, on construit le symétrique de u_1 par rapport à la première bissectrice Δ . Puis on recommence avec u_1, pour placer u_2, puis u_3,...etc.



Conjectures : Par lecture graphique :

Conjeture n°1. Il semble que la suite (u_n) est strictement décroissante et bornée. Tous les termes sont compris entre 4 et 10.

Conjeture n°2. Il semble que la suite (u_n) est convergente et a pour limite 4, l'abscisse du point d'intersection de la droite d avec la première bissectrice.

3.2) Étude de la suite (u_n)

Nous allons utiliser une nouvelle suite, dite « ***suite auxiliaire*** », (v_n) définie pour tout entier n, de la manière suivante :

$$\boxed{v_n = u_n - 4 \qquad (1)}$$

Qu'on peut traduire immédiatement, pour tout entier n, par :

$$\boxed{u_n = v_n + 4 \qquad (2)}$$

***1ère étape* :Montrer que la suite (v_n) est géométrique**.

Pour tout entier n, on a

	$v_{n+1} = u_{n+1} - 4$	d'après la relation (1)
Donc	$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 - 4$	d'après la relation de récurrence de (u_n)
Donc	$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$	je calcule 2 – 4
Donc	$v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + 4) - 2$	d'après la relation (2)
Donc	$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 2 - 2$	je distribue
Donc	$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$	je barre +2 et –2.

De plus, le premier terme de la suite (v_n) est donné par : $v_0 = u_0 - 4 = 10 - 4 = \mathbf{6}$.

Conclusion : La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 6$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

***2ème étape* :Déterminer une expression explicite de (v_n) et de (u_n) en fonction de n**.

(v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 6$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. Donc

Pour tout entier n, on a : $v_n = v_0 q^n$

donc $v_n = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

ou encore $v_n = 6 \times (0{,}5)^n$

D'autre part, d'après la relation (2), on a : $u_n = v_n + 4$

Donc $u_n = 6 \times (0{,}5)^n + 4$

Conclusion : Pour tout entier n, on a : $v_n = 6 \times (0{,}5)^n$ et $u_n = 6 \times (0{,}5)^n + 4$.

***3ème étape** : Étudier le sens de variation des deux suites (v_n) et (u_n)*

La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 6 > 0$ et de raison q = 0,5.
Comme q est compris entre 0 et 1 et $v_0 > 0$, *la suite (v_n) est strictement décroissante*.
Et comme pour tout entier n, $u_n = v_n + 4$, les deux suites (u_n) et (v_n) ont le même sens de variation. Donc, *la suite (u_n) est aussi strictement décroissante*.

***4ème étape** : Déterminer les limites des deux suites (v_n) et (u_n).*

La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 6$ et de raison q = 0,5.
Comme 0 < q < 1, la suite (v_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
De plus, d'après la relation (2), pour tout entier n, $u_n = v_n + 4$, donc la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$, abscisse du point d'intersection de la droite d et la première bissectrice.

***5ème étape** : Déterminer la sommes des (n+1) premiers termes des deux suites (v_n) et (u_n) et déterminer leurs limites*

La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 6$ et de raison q = 0,5. Donc :

$$S_n' = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

Donc : $$S_n' = \frac{v_0 \times (1 - q^{n+1})}{1 - q}$$

Donc : $$S_n' = \frac{4 \times (1 - (0{,}5)^{n+1})}{1 - 0{,}5}$$

Donc : $$S_n' = \frac{4 \times (1 - (0{,}5)^{n+1})}{0{,}5}$$

Par conséquent : $$S_n' = 8 \times [1 - (0{,}5)^{n+1}]$$

D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} (0{,}5)^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} [1 - (0{,}5)^n] = 1$. et en multipliant par 8 :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n' = 8$$

Par ailleurs, d'après la relation (2), pour tout entier n, $u_n = v_n + 4$, donc

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$S_n = (v_0 + 4) + (v_1 + 4) + (v_2 + 4) + \cdots + (v_n + 4)$$
$$S_n = (v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n) + 4 \times (n+1)$$ il y a (n+1) termes
$$S_n = S_n' + 4 \times (n+1)$$

Par conséquent : $$S_n = 8 \times [1 - (0{,}5)^{n+1}] + 4(n+1)$$

D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} S_n' = 8$ et $\lim_{n\to+\infty} 4(n+1) = +\infty$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

OUF !