Fonctions de référence

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Fonctions de référence Fonctions linéaires et fonctions affines ✓ Variations de la fonction carré, de la fonction inverse. ✓	Donner le sens de variation d'une fonction affine. ✓ Donner le tableau de signes de $a\,x+b$ pour des valeurs numériques données de a et b. ✓ Connaître les variations des fonctions carré et inverse. Représenter graphiquement les fonctions carré et inverse. ✓	On fait le lien entre le signe de $a\,x+b$, le sens de variation de la fonction et sa courbe représentative. ✓ Exemples de non-linéarité. En particulier, faire remarquer que les fonctions carré et inverse ne sont pas linéaires. ✓

I. Fonctions affines, fonctions linéaires

1.1) Rappels définitions

Définition 1.

Une ***fonction affine*** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=a\,x+b$ où a et b sont deux nombres réels donnés.

En particulier : Si $b = 0$, alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=a\,x$ s'appelle une ***fonction linéaire***.

a s'appelle le ***coefficient*** de la fonction affine ou linéaire;
b s'appelle le ***terme constant*** de la fonction affine ou linéaire.

Exemple 1. - La fonction définie par $f(x)=-3\,x+\sqrt{2}$ est une fonction affine de coefficient -3 et de terme constant $\sqrt{2}$. Elle n'est pas linéaire.

- La fonction définie par $f(x)=\frac{-3}{5}x$ est une fonction linéaire.

- La fonction définie par $f(x)=-2\,x^2+5$ n'est ni affine, ni linéaire.

1.2) Sens de variation

Théorème 1.

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=a\,x+b$ où a et b sont deux nombres réels donnés. Alors :

- Si a est positif, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- Si a est négatif, alors la fonction f est strictement décroissante $\mathbb{R}$;
- Si $a = 0$, alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Soient x_1 et x_2 deux nombres réels quelconques. Supposons que $x_2 > x_1$. Donc $x_2 - x_1 > 0$.
Mais alors : $f(x_2)-f(x_1)=(a x_2+b)-(a x_1+b)=a x_2+b-a x_1-b=a(x_2-x_1)$
Ainsi :
Si $a > 0$, alors $f(x_2)-f(x_1)>0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a < 0$, alors $f(x_2)-f(x_1)<0$ donc f est strictement décroissante $\mathbb{R}$.
Si $a = 0$, alors $f(x)=b$ pour tout x, donc la fonction f est constante $\mathbb{R}$.

Tableaux de variations

$a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-$ $\nearrow$	$+$

$a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+$ $\searrow$	$-$

$a = 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\rightarrow$	

1.3) Représentation graphique

Théorème 2.

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=a x+b$ où a et b sont deux nombres réels donnés. (Si b = 0, f est linéaire). Alors

- Dans un repère du plan, la représentation graphique de la fonction f est une droite D non parallèle à Oy et qui passe par le point B(0 ; b).
- Réciproquement, toute droite D non parallèle à Oy est la réprésentation graphique d'une fonction affine (ou linéaire).

Définition 2.

a s'appelle le ***coefficient directeur*** de la droite D
b s'appelle ***l'ordonnée à l'origine*** de la droite D. b = f(0). B(0 ; b) $\in$ D.

1.4) Proportionnalité des accroissements

Théorème 3.

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=a x+b$ où a et b sont deux nombres réels donnés. Alors si x_1 et x_2 sont deux nombres réels distincts et si $y_1=f(x_1)$ et $y_2=f(x_2)$, alors :
1°) Les quantités $f(x_2)-f(x_1)$ et (x_2-x_1) sont proportionnelles et le coefficient de proportionnalité est égal au coefficient de la fonction.
2°) Le coefficient directeur de la fonction peut être calculé par :

$$a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{Accroissement\ vertical}{Accroissement\ horizontal}$$

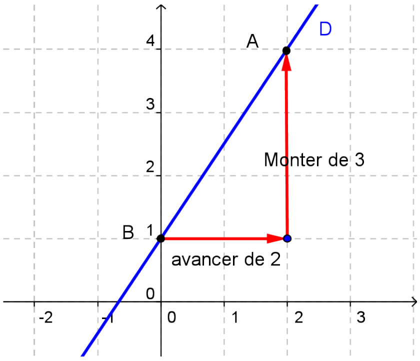
On dit que ***l'accroissement de la fonction*** est proportionnel à ***l'accroissement des abscisses***.

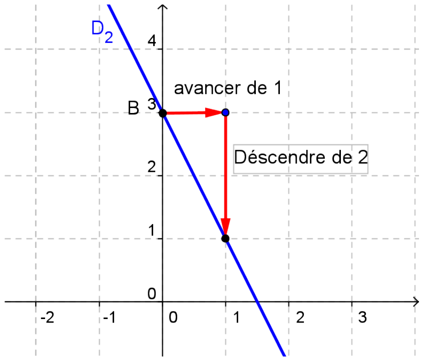
Démonstration.

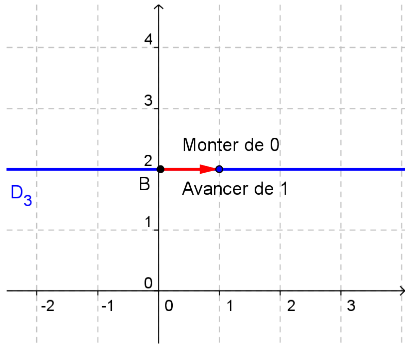
Soient x_1 et x_2 deux nombres réels quelconques, mais différents. Donc $x_2 - x_1 \neq 0$ et $y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = (a x_2 + b) - (a x_1 + b) = a x_2 + b - a x_1 - b = a(x_2 - x_1)$

D'où le résultat.

Exemples 2. Déterminer graphiquement le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine







Coefficient directeur $a = \dfrac{3}{2}$ Ordonnée à l'origine $b = 1$ Donc $f(x) = \dfrac{3}{2}x + 1$	Coefficient directeur $a = \dfrac{-2}{1}$ Ordonnée à l'origine $b = 3$ Donc $f(x) = -2x + 3$	Coefficient directeur $a = 0$ Ordonnée à l'origine $b = 2$ Donc $f(x) = 2$ constante

Exemple 3. Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine f telle que : $f(3) = 3$ et $f(6) = 1$.

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$

1°) Recherche du coefficient directeur a :

Ici on a : $x_1 = 3$ et $x_2 = 6$

On sait que $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{1-3}{6-3} = \dfrac{-2}{3}$ donc $a = \dfrac{-2}{3}$.

2°) Calcul de l'ordonnée à l'origine b.

On remplace a par sa valeur dans l'expression de f pour calculer b :

$f(x) = \dfrac{-2}{3}x + b$ et $f(3) = 3$. Donc $3 = \dfrac{-2}{3} \times 3 + b$. Donc $3 = -2 + b$.

Ce qui donne : $b = 5$.

Conclusion : L'expression de la fonction affine f est : $f(x) = \dfrac{-2}{3}x + 5$.

1.5) Étude du signe d'une fonction affine

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$.

Nous avons vu, dans le chapitre 5 sur les équations et inéquations, comment étudier

le signe d'une expression du premier degré de la forme $f(x)=ax+b$.
Nous avons utilisé deux méthodes : *la méthode algébrique* et *la méthode graphique*.
On cherche d'abord l'abscisse du point où la droite coupe l'axe des abscisses. Pour cela, on résout l'équation : $f(x) = 0$. Ce qui équivaut à $[ax+b = 0]$ donc à $[ax = -b]$ donc à $x=\frac{-b}{a}$. On obtient une *valeur remarquable* $x=\frac{-b}{a}$. On a donc :

***a* > 0**

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Pour tout $x < \frac{-b}{a}$ $f(x) < 0$

Pour tout $x > \frac{-b}{a}$ $f(x) > 0$

***a* < 0**

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

Pour tout $x < \frac{-b}{a}$ $f(x) > 0$

Pour tout $x > \frac{-b}{a}$ $f(x) < 0$

<u>Exemple 3</u>.
On considère la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $x \rightarrow f(x)=3x-5$
1°) Donner le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2°) Étudier le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3°) Déterminer le signe de $f(\pi/2)$ sans le calculer.
4°) Comparer sans les calculer $f(\pi/2)$ et $f(\sqrt{2})$ sans les calculer.
5°) Si $-3 \leqslant a < -2$, donner le meilleur encadrement de $f(a)$.

1°) f est une fonction affine de coefficient $a = 3$, donc $a > 0$, donc la fonction f est strictement croissante

2°) La fonction f est strictement croissante, donc elle est négative, nulle, puis positive. De plus $f(x)=0$ (ssi) $3x-5=0$ (ssi) $3x=5$ (ssi) $x=5/3$. On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$5/3$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Par conséquent : Pour tout $x < 5/3$: $f(x) < 0$ et pour tout $x > 5/3$: $f(x) > 0$.

3°) $\pi/2=1{,}57...$ et $5/3=1{,}66...$ Donc $\pi/2<5/3$
Or la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ Donc $f(\pi/2)<f(5/3)$.
Donc $f(\pi/2)<0$. CQFD
4°) $\pi/2=1{,}57...$ et $\sqrt{2}=1{,}41...$ Donc $\pi/2>\sqrt{2}$.
Or la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ Donc $f(\pi/2)>f(\sqrt{2})$. CQFD
5°) La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc si $-3 \leqslant a < -2$, alors $f(-3) \leqslant f(a) < f(-2)$. Donc $-14 \leqslant f(a) < -11$.

II. La fonction carrée

2.1) définition

Définition 3.

La ***fonction carrée*** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2$

Exemple 4. - *L'image* de – 3 par la fonction carrée est : $f(-3)=(-3)^2=9$.

- L'image de $3+\sqrt{2}$ par la fonction carrée est :

$f(3+\sqrt{2})=(3+\sqrt{2})^2=3^2+2\times 3\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=9+6\sqrt{2}+2=11+6\sqrt{2}$.

- Pour déterminer *les antécédents* de 5, on résout une équation : $f(x)=5$.

Ce qui équivaut à $x^2=5$

On passe tout à gauche : $x^2-5=0$.

On transforme en I.R. : $x^2-(\sqrt{5})^2=0$

On factorise : $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=0$

Donc, d'après le Théorème du produit nul, on obtient $x-\sqrt{5}=0$ ou $x+\sqrt{5}=0$

D'où : $x=\sqrt{5}$ ou $x=-\sqrt{5}$. Donc cette équation admet deux solutions : $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$. On écrit : $S=\{-\sqrt{5} ; \sqrt{5}\}$. Ce qui donne :

Conclusion. 5 admet *deux antécédents* par la fonction carrée qui sont $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.

2.2) Sens de variation

Théorème 4.

La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Démonstration.

1°) Sur $]-\infty; 0]$:

Soient x_1 et x_2 deux nombres réels quelconques négatifs. Supposons que $x_1 < x_2$.
Donc $x_1 < x_2 < 0$ et $x_1 - x_2 < 0$. On a aussi : $x_1 + x_2 < 0$. (x_1 et x_2 sont négatifs) :
Mais alors : $f(x_1)-f(x_2)=(x_1)^2-(x_2)^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)$ d'après l'IRn°3.
Or $x_1 - x_2 < 0$ et $x_1 + x_2 < 0$. Donc $f(x_1)-f(x_2)>0$. f change le sens des inégalités.
Par conséquent f est strictement décroissante $]-\infty; 0]$.

2°) Sur $[0 ; +\infty[$

Soient x_1 et x_2 deux nombres réels quelconques positifs. Supposons que $x_1 < x_2$.
Donc $0 < x_1 < x_2$ et $x_1 - x_2 < 0$. On a aussi : $x_1 + x_2 > 0$. (x_1 et x_2 sont positifs) :
Mais alors : $f(x_1)-f(x_2)=(x_1)^2-(x_2)^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)$ d'après l'IRn°3.
Or $x_1 - x_2 < 0$ et $x_1 + x_2 > 0$. Donc $f(x_1)-f(x_2)<0$. f conserve le sens des inégalités. Par conséquent f est strictement croissante $[0 ; +\infty[$.

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Théorème 5.

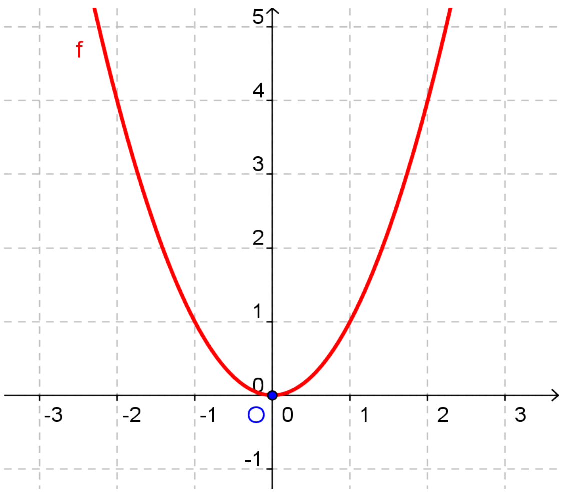
Pour tous nombres réels a et b, on a :
1°) Si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $a^2 \leqslant b^2$ et 2°) Si $a \leqslant b \leqslant 0$ alors $a^2 \geqslant b^2$
Autrement dit :
1°) Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre ;
2°) Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire.

Démonstration.
1°) On sait que la fonction carrée est strictement croissante sur [0 ;+ ∞[. Donc si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$ donc $a^2 \leqslant b^2$.
2°) De même, on sait que la fonction carrée est strictement décroissante sur] – ∞; 0]. Donc si $a \leqslant b \leqslant 0$ alors $f(a) \geqslant f(b)$ donc $a^2 \geqslant b^2$. CQFD

2.3) Représentation graphique

Définition 4.

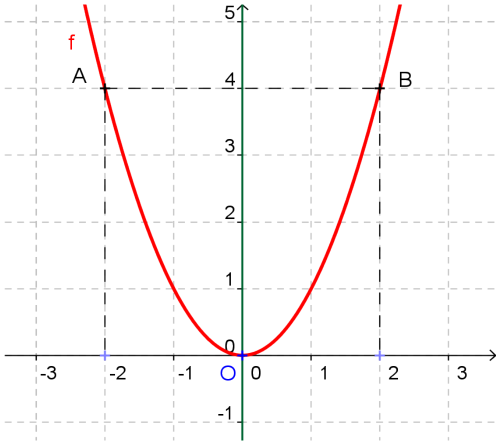
Dans un repère du plan, la représentation graphique de ***la fonction carrée*** est une courbe appelée ***parabole*** de ***sommet O***, l'origine du repère.



Remarque. On peut remarquer au passage que, dans un repère quelconque, la représentation graphique de la fonction carrée n'est pas une droite, donc ***la fonction carrée n'est ni affine, ni linéaire***.

Théorème 5.

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), la courbe représentative de la fonction carrée est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées Oy.
On dit que la parabole admet un ***axe de symétrie Oy***.



Démonstration.
En effet pour tout nombre réel x, on a : $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Donc les nombres x et $-x$ ont la même image. Donc les points A et B sont symétriques par rapport à Oy.

2.4) Applications

Exemple 5. 1°) Dans chacun des cas suivants, comparer les carrés des nombres donnés sans utiliser la calculatrice :

a) π et 3,14. b) $\frac{-2}{3}$ et $\frac{-5}{6}$ c) $\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{2}$.

b) Donnez le meilleur encadrement possible de $5a^2$ sachant que : $-3 \leqslant a < -2$.

c) Étudier les variations des fonctions suivantes sur $]-\infty ; 0]$ puis sur $[0 ; +\infty[$:

$f(x)=x^2-2$; $g(x)=-x^2$; $h(x)=-x^2+3$; $k(x)=2x^2$ et $k(x)=2x^2-3$

III. La fonction inverse

3.1) définition

Définition 5.

La ***fonction inverse*** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par : $f(x)=\frac{1}{x}$

Exemple 6. - *L'image* de – 3 par la fonction carrée est : $f(-3)=\frac{1}{-3}=\frac{-1}{3}$.

- *L'image* de $\frac{-2}{5}$ par la fonction carrée est : $f(\frac{-2}{5})=\frac{1}{\frac{-2}{5}}=\frac{-5}{2}$

- Pour déterminer *le* (ou *les*) *antécédents* de 5, on résout une équation : $f(x)=5$.

Ce qui équivaut à : $\frac{1}{x}=5$.

Cette équation a une valeur interdite $x = 0$. (Donc 0 n'a pas d'antécédent par f).
On écrit l'égalité des produits en croix : $5x=1$.
On divise les deux côtés par 5 : $x=1/5$
Donc cette équation admet une seule solution : $x=1/5$. On écrit $S=\{1/5\}$.

Conclusion. 5 admet *un seul antécédent* par la fonction inverse qui est $1/5$.

3.2) Sens de variation

Théorème 6.

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Démonstration.

1°) Sur $]-\infty; 0]$:

Soient x_1 et x_2 deux nombres réels quelconques strictement négatifs.
Supposons que $x_1 < x_2$. Donc $x_1 < x_2 < 0$ et $x_1 - x_2 < 0$. On a aussi : $x_1 x_2 > 0$.
(puisque x_1 et x_2 sont de même signe). Mais alors :

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}=\frac{-(x_1-x_2)}{x_1x_2}.$$

Or $x_1 - x_2 < 0$ et $x_1 x_2 > 0$. Donc $f(x_1)-f(x_2)>0$. Donc $f(x_1)>f(x_2)$.
f change le sens des inégalités. Par conséquent f est strictement décroissante $]-\infty; 0[$.

2°) Sur $]0;+\infty[$:

Soient x_1 et x_2 deux nombres réels quelconques strictement positifs.
Supposons que $x_1 < x_2$. Donc $0 < x_1 < x_2$ et $x_1 - x_2 < 0$. On a aussi : $x_1 x_2 > 0$.
(puisque x_1 et x_2 sont de même signe). Mais alors :

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}=\frac{-(x_1-x_2)}{x_1x_2}.$$

Or $x_1 - x_2 < 0$ et $x_1 x_2 > 0$. Donc $f(x_1)-f(x_2)>0$. Donc $f(x_1)>f(x_2)$.
f change le sens des inégalités. Par conséquent f est strictement décroissante $]0\,;+\infty[$.

Tableaux de variation (il y a une valeur interdite en 0, d'où la double barre !).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↘	

Théorème 7.

Pour tous nombres réels non nuls a et b, on a :

1°) Si $0<a\leqslant b$ alors $\dfrac{1}{a}\geqslant\dfrac{1}{b}$ et 2°) si $a\leqslant b<0$ alors $\dfrac{1}{a}\geqslant\dfrac{1}{b}$

Autrement dit : Deux nombres réels non nuls et de <u>même signe</u> sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

Démonstration.

1°) On sait que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Donc si $0<a\leqslant b$ alors $f(a)\leqslant f(b)$ donc $\dfrac{1}{a}\geqslant\dfrac{1}{b}$.

2°) De même, la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$.

Donc si $a\leqslant b<0$ alors $f(a)\geqslant f(b)$ donc $\dfrac{1}{a}\geqslant\dfrac{1}{b}$. CQFD

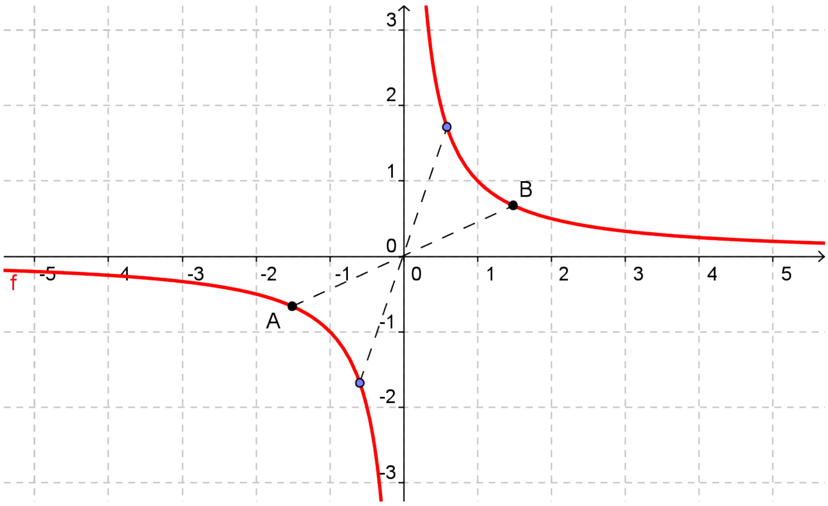
3.3) Représentation graphique

Définition 6.

Dans un repère du plan, la représentation graphique de la ***fonction inverse*** est une courbe appelée une ***hyperbole*** de ***centre O***, origine du repère.

Voir page suivante

Remarque. On peut remarquer au passage que, dans un repère quelconque, la représentation graphique de la fonction inverse n'est pas une droite, donc *la fonction inverse n'est ni affine, ni linéaire.*



Théorème 5.

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), la courbe représentative de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine O du repère.
On dit que l'hyperbole admet un ***centre de symétrie O.***

Démonstration.

En effet, pour tout nombre réel non nul x, on a : $f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)$. Donc les nombres x et $-x$ ont des images opposées. Donc les points A et B sont symétriques par rapport au point O, origine du repère.

3.4) Applications

Exemple 7. 1°) Dans chacun des cas suivants, comparer les inverses des nombres donnés sans utiliser la calculatrice :

a) π et 3,14. b) $\frac{-2}{3}$ et $\frac{-5}{6}$ c) $\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{2}$.

b) Donnez le meilleur encadrement possible de $\frac{-5}{a}$ sachant que : $-3\leqslant a<-2$.

c) Étudier les variations des fonctions suivantes sur $]-\infty; 0]$ puis sur $[0 ; +\infty[$:

$f(x)=\frac{1}{x}+2$; $g(x)=\frac{2}{x}$; $h(x)=\frac{-1}{x}$ et $k(x)=\frac{-1}{x}+2$.