Repérage dans le plan

Ce que dit le programme

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Coordonnées d'un point du plan Abscisse et ordonnée d'un point dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Distance de deux points du plan. Milieu d'un segment.	Repérer un point donné du plan, placer un point connaissant ses coordonnées. Calculer la distance de deux points connaissant leurs coordonnées. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.	Un repère orthonormé du plan est défini par trois points (O, I, J) formant un triangle rectangle isocèle de sommet O. À l'occasion de certains travaux, on pourra utiliser des repères non orthonormés.
Configurations du plan Triangles, quadrilatères, cercles.	Pour résoudre des problèmes : Utiliser les propriétés des triangles, des quadrilatères, des cercles. Utiliser les propriétés des symétries axiale ou centrale.	Les activités des élèves prennent appui sur les propriétés étudiées au collège et peuvent s'enrichir des apports de la géométrie repérée. Le cadre de la géométrie repérée offre la possibilité de traduire numériquement des propriétés géométriques et permet de résoudre certains problèmes par la mise en œuvre d'algorithmes simples.

I. Repères dans le plan

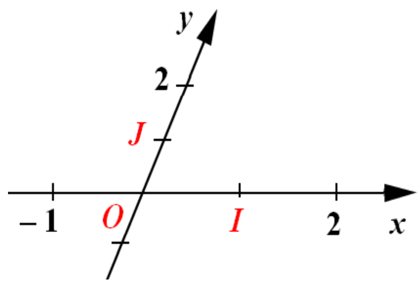
1.1) Repère orthonormé

Définition 1.

Trois points O, I et J non alignés du plan définissent un repère (O ; I ; J) de ce plan.

En effet ;

- ➔ Si les points O, I et J sont ***alignés***, ils appartiennent à une même droite du plan, donc *ne définissent pas un repère du plan.*
- ➔ Si O, I et J sont ***non alignés***, ils forment un triangle. Donc *ils définissent un repère (O ; I ; J) du plan.*
  On choisit **O** comme ***origine du repère***. Les deux axes (OI) et (OJ) sont sécants en O. (OI) est l'***axe des abscisses*** avec unité OI et (OJ) est l'***axe des ordonnées*** avec unité OJ.



Repère (O ; I ; J) quelconque

Définition 2.

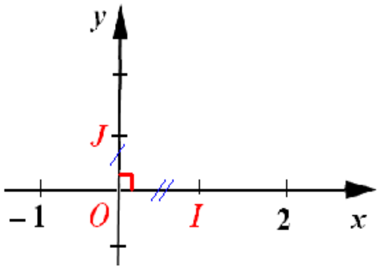
Soit (O; I ; J) un repère du plan.
1°) On dit que (O; I, J) est un ***repère orthogonal*** (**r.o.g**) lorsque $(OI)\perp(OJ)$;
c'est-à-dire si (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.

2°) On dit que (O; I, J) est un ***repère orthonormé*** (**r.o.n**) ou ***orthonormal*** lorsque :

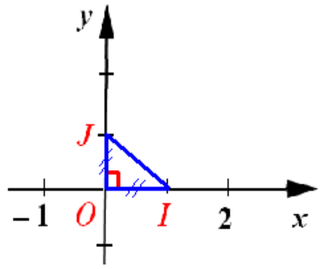
- $(OI)\perp(OJ)$. Les deux axes (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.
- et $OI = OJ$. On choisit la même unité sur les deux axes. (Même échelle).

Remarque : Définir un r.o.n. revient à définir un *triangle OIJ rectangle isocèle* en O.

Ce qui équivaut à : $(OI)\perp(OJ)$ et $OI = OJ$.

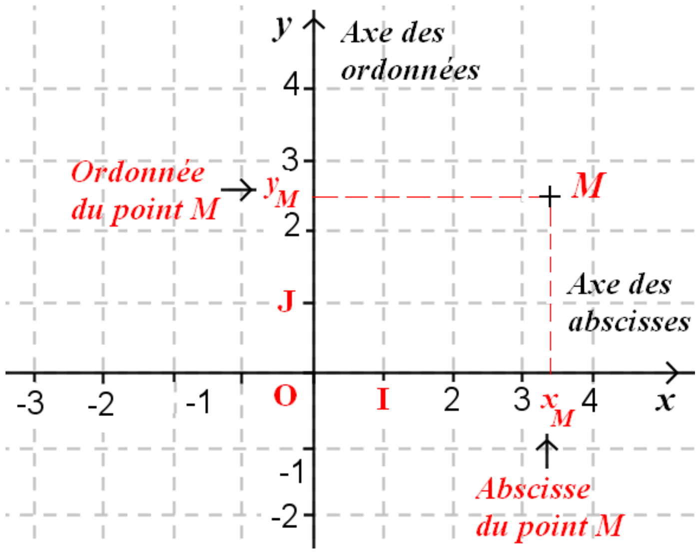


Repère (O ; I ; J) orthogonal



Repère (O ; I ; J) orthonormé

1.2) Repérage d'un point du plan



Théorème 1.

Soit (O ; I ; J) un repère quelconque du plan.

Tout point M du plan est repéré par un ***couple*** $(x_M ; y_M)$ de nombres réels appelés ***coordonnées*** du point M. x_M est l'***abscisse*** de M et se lit sur l'axe horizontal, y_M est l'***ordonnée*** de M et se lit sur l'axe vertical.

Remarque : Les coordonnées et les axes sont rangés (naturellement) par ordre alphabétique :

1er	2ème
x	**y**
axe **h**orizontal	axe **v**ertical
abscisse	**o**rdonnée
antécédent	**i**mage

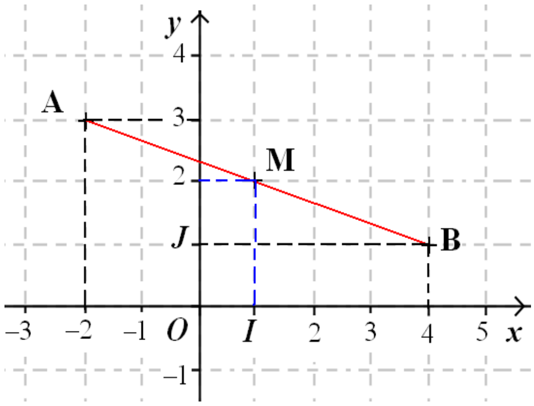
II. Coordonnées du milieu d'un segment

Théorème 2.

Dans un repère quelconque (O ; I ; J), si A et B sont deux points de coordonnées $A\ (x_A\ ;\ y_A)$ et $B\ (x_B\ ;\ y_B)$, alors le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

Exemple 1. *Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), placer les points* A (–2 ; 3) *et* B (4 ;1) *et calculer les coordonnées du milieu M du segment [AB].*



Les coordonnées du milieu M du segment [AB] sont donnés par :

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-2+4}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \\[2ex] y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{1+3}{2}=\dfrac{4}{2}=2 \end{cases}$$

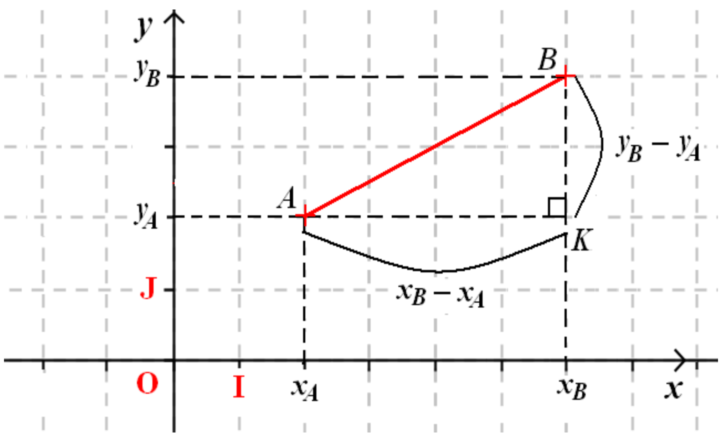
Par conséquent, les coordonnées du milieu M du segment [AB] sont M(1 ; 2).

III. Calcul de la longueur d'un segment

Théorème 3.

Dans un repère **orthonormé** (O ; I ; J), si A et B sont deux points de coordonnées $A\ (x_A\ ;\ y_A)$ et $B\ (x_B\ ;\ y_B)$, alors la longueur du segment $[AB]$ est donnée par :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$



Démonstration

Le repère (O ; I ; J) étant *orthonormé*, les deux axes (OI) et (OJ) sont perpendiculaires. Donc le triangle ABK est rectangle en K. De plus OI = OJ = 1, donc, nous avons la même unité sur les deux axes. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 = AK^2 + BK^2$$

Donc $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

Par conséquent : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ CQFD

Exemple 2. *Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on donne les points de coordonnées A (–2 ; 3) et B (4 ;1) et calculer la longueur du segment [AB].*

Le repère (O ; I ; J) étant *orthonormé*, on peut appliquer le théorème

A (–2 ; 3)
et B (4 ; 1)

(*J'écris exprès les points et leurs coordonnées les uns en dessous des autres pour calculer facilement les différences*).

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (1 - 3)^2}$$

$$AB = \sqrt{6^2 + (-2)^2}$$

$$AB = \sqrt{36 + 4}$$

$$AB = \sqrt{40}$$

ou encore : $AB = 2\sqrt{10}$

III. Applications

3.1) Alignement de trois points

Nous avons déjà vu en classe de 5ème une condition sur les longueurs pour qu'*un triangle ABC existe*. On dit aussi que le triangle est *constructible* si et seulement si la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Cette propriété s'appelle ***l'inégalité triangulaire*** ou encore « *le plus court chemin entre deux points est la ligne droite* » :

Théorème 4. ***Inégalité triangulaire*** et ***alignement***

a) Un triangle ABC est constructible si et seulement si les trois inégalités sont satisfaites : (1) $AB \leqslant AC + CB$; (2) $AC \leqslant AB + BC$; (3) $BC \leqslant BA + AC$.

b) S'il y a égalité, par exemple si AB = AC + CB, alors le triangle ABC est ***aplati*** et les trois points ***A, C et B sont alignés*** dans cet ordre.

Exemple 3.

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), placer les points A(–1;–2) ; B(5;1) et K(1 ;–1). Les points A, B et K sont-ils alignés ? Justifier votre réponse.

Conjecture : *A l'oeil nu, il semble que les trois points soient alignés.*
Vérifions par le calcul. Le repère (O ; I ; J) étant orthonormé, on calcule les longueurs :

$AK=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$	$AB=\sqrt{(x_K-x_A)^2+(y_K-y_A)^2}$	$KB=\sqrt{(x_B-x_K)^2+(y_B-y_K)^2}$
$AK=\sqrt{(1+1)^2+(-1+2)^2}$	$AB=\sqrt{(5+1)^2+(1+2)^2}$	$KB=\sqrt{(1-5)^2+(-1-1)^2}$
$AK=\sqrt{2^2+1^2}$	$AB=\sqrt{6^2+3^2}$	$KB=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}$
$AK=\sqrt{4+1}$	$AB=\sqrt{36+9}$	$KB=\sqrt{16+4}$
$AK=\sqrt{5}$	$AB=\sqrt{45}$	$KB=\sqrt{20}$

Le plus grand côté est [AB]. A-t-on AB = AK + KB ?
On sait que : $AB=\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=\sqrt{9}\times\sqrt{5}=3\sqrt{5}$; $AK=\sqrt{5}$ et
$KB=\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=\sqrt{4}\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$. Mais alors : $AB=3\sqrt{5}=\sqrt{5}+2\sqrt{5}=AK+KB$
Conclusion : On a bien $AB = AK + KB$; donc les trois points A, K et B sont alignés dans cet ordre.

3.2) Nature d'un triangle

Exemple 4.

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), placer les points A(–1;–2) ; B(5;1) et C(2 ;7).
Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse.

Conjecture : *A l'oeil nu, il semble que le triangle soit isocèle rectangle.*
Vérifions par le calcul. Le repère (O ; I ; J) étant orthonormé, on calcule les longueurs :

$AB=\sqrt{(x_K-x_A)^2+(y_K-y_A)^2}$	$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}$	$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$
$AB=\sqrt{(5+1)^2+(1+2)^2}$	$BC=\sqrt{(2-5)^2+(7-1)^2}$	$AC=\sqrt{(2+1)^2+(7+2)^2}$
$AB=\sqrt{6^2+3^2}$	$BC=\sqrt{(-3)^2+6^2}$	$AC=\sqrt{3^2+9^2}$
$AB=\sqrt{36+9}$	$BC=\sqrt{9+36}$	$AC=\sqrt{9+81}$
$AB=\sqrt{45}$	$BC=\sqrt{45}$	$AC=\sqrt{90}$

- D'abord, on remarque que $AB = BC$. Donc, le triangle ABC est isocèle en B.
- De plus, le côté le plus grand est [AC]. Cherchons si ABC est rectangle ?

Je calcule séparément les carrés :

$$\begin{cases} AC^2=\sqrt{90}^2=90 \\ AB^2+BC^2=\sqrt{45}^2+\sqrt{45}^2=45+45=90 \end{cases}$$

On constate que $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.
Conclusion. Le triangle ABC est isocèle rectangle en B. CQFD