Le second degré

Ce que dit le programme

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Second degré Forme canonique d'une fonction polynôme de degré deux. Équation du second degré, discriminant. Signe du trinôme.	Utiliser la forme la plus adéquate d'une fonction polynôme de degré deux en vue de la résolution d'un problème : développée, factorisée, canonique.	On fait le lien avec les représentations graphiques étudiées en classe de seconde. La mise sous forme canonique n'est pas un attendu du programme. Des activités algorithmiques sont réalisées dans ce cadre.

1. Fonctions polynômes du second degré

1.1) Vocabulaire et définitions

$3x^2$ s'appelle un monôme de degré 2 et de coefficient 3.

$5x=5x^1$ s'appelle un monôme de degré 1 et de coefficient 5.

$7=7x^0$ est une constante non nulle et correspond à un monôme de degré 0.

Plus généralement :

Définition 1.
L'expression écrite sous la *forme développée réduite* : ***ax*² + *bx* + *c*** où *a, b* et *c* sont des réels donnés, avec $a\neq 0$, s'appelle un ***polynôme de degré* 2** ou un ***trinôme du second degré*** de la variable *x*.

La fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : ***f* (*x*) = *ax*² + *bx* + *c***, s'appelle une ***fonction polynôme du second degré***.

Exemples

a) La fonction définie par $f_0(x)=7$ est une fonction constante, donc une fonction polynôme de degré 0.

b) La fonction définie par $f_1(x)=3x+4$ est une fonction polynôme de degré 1.

c) La fonction définie par $f_2(x)=3x(x-1)-x^2+8$ est une fonction polynôme de degré 2. Pour le voir, il suffit de *développer et réduire* cette expression.

$$f_2(x)=3x\times x-3x\times 1-x^2+8$$
$$=3x^2-3x-x^2+8$$
$$f_2(x)=2x^2-3x+8$$ avec $a=2$; $b=-3$ et $c=8$.

d) La fonction définie par $f_3(x)=3(x-1)^2-5$ est une fonction polynôme de degré 2. Pour le voir, il suffit de *développer et réduire* cette expression.

$f_3(x)=3(x-1)^2-5$

$f_3(x)=3[x^2-2x+1]-5$

$f_3(x)=3\times x^2-3\times 2x+3\times 1-5$

$f_3(x)=3x^2-6x-2$ avec $a = 3$; $b = -6$ et $c = -2$.

e) La fonction définie par $f_4(x)=2(x-1)(x-3)$ est une fonction polynôme de degré 2. Pour le voir, il suffit de *développer et réduire* cette expression.

$f_4(x)=2(x-1)(x-3)$

$f_4(x)=2[x\times x-x\times 3-1\times x+1\times 3]$

$f_4(x)=2[x^2-3x-x+3]$

$f_4(x)=2[x^2-4x+3]$

$f_4(x)=2x^2-8x+6$ avec $a = 2$; $b = -8$ et $c = 6$.

1.2) Formes remarquables

Nous voyons ci-dessus trois formes d'*écritures réduites* d'une expression algébrique (ou d'un trinôme) du second degré.

Définition 2.
Un polynôme peut s'écrire de plusieurs façons. Il existe trois formes remarquables d'écriture d'une expression ou une fonction du second degré. Soit *a, b* et *c* trois nombres réels avec $a\neq 0$.
1°) La ***forme développée réduite*** : $f(x) = ax^2 + bx + c$.
2°) La ***forme factorisée*** : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
ou encore : $f(x) = a(x - x_0)^2$.
3°) La ***forme canonique*** : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Exemples

a) La fonction définie par $f_1(x)=2x^2-4x-6$ est écrite sous la *forme développée réduite*, avec $a = 2$; $b = -4$ et $c = -6$.

b) La fonction définie par $f_2(x)=2(x+1)(x-3)$ est écrite sous la *forme factorisée*, avec $a = 2$; $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$.

c) La fonction définie par $f_3(x)=5(x-3)^2$ est écrite sous la *forme factorisée*, avec $a = 5$ et $x_0 = 3$. C'est la même forme que dans b) avec $x_1 = x_2 = 3$. que nous avons appelé x_0.

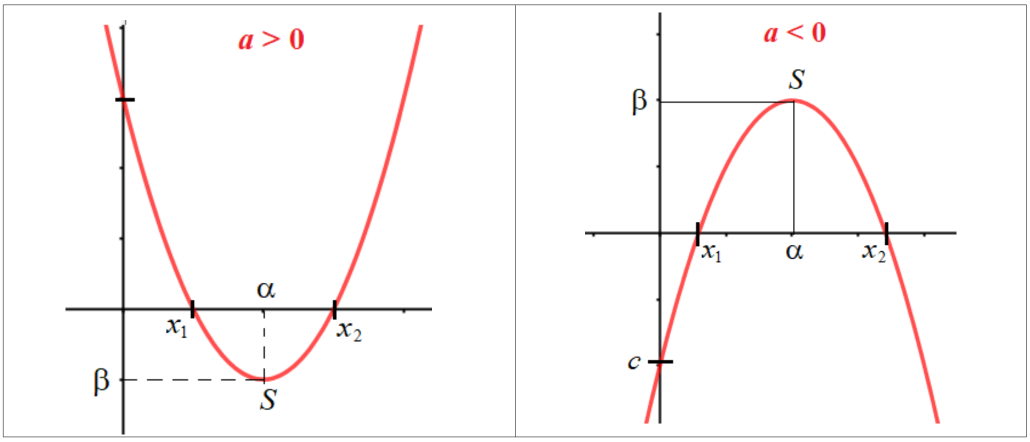
d) La fonction définie par $f_4(x)=2(x-1)^2-8$ est écrite sous la *forme canonique*, avec $a = 2$; $\alpha = 1$ et $\beta = -8$.

Suivant le problème posé, nous sommes amenés à utiliser l'une ou l'autre de ces formes, Le passage de l'une à l'autre est plus ou moins facile.

1.3) Représentation graphique

Théorème 1 et définition 3.
La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré f dans un repère orthonormé s'appelle une ***parabole*** ayant deux branches et un **sommet** **S(α ; β)**.
Si $a > 0$, la parabole *dirige ses branches* ***vers le haut*** **;**
Si $a < 0$, la parabole dirige ses branches **vers le bas.**

Illustration :



1.4) Racine d'un trinôme du second degré

Définition : On appelle ***racine*** d'un polynôme du second degré f, toute valeur de la variable x, ***solution*** de l'équation $f(x)=0$.

Exemple : $x = 1$ est une racine du trinôme du secon degré : $f(x)=2x^2-4x+2$.
En effet $f(1) = 0$.

1.5) Forme canonique et parabole d'un trinôme du second degré

Théorème n°2 et définition 4
Tout trinôme du second degré $f(x)=ax^2+bx+c$, avec $a\neq 0$, s'écrit d'une manière unique sous la ***forme canonique*** : $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=\frac{-b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$. Si la courbe représentative de f dans un repère orthonormé est la parabole de sommet S. Alors :

- Le sommet S de la parabole a pour coordonnées S(α ; β).
- La droite verticale d'équation : $x=-\frac{b}{2a}$ est un ***axe de symétrie*** de la parabole.
- La parabole coupe l'axe des abscisses aux points ayant pour abscisses x_1 et x_2, ou x_0, *les racines* du trinôme (lorsqu'elles existent).
- La parabole coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées : (0 ; c) qu'on pourrait appeler « l'ordonnée à l'origine ».

Exemple : *Trouver la forme canonique de la fonction polynôme définie par :*

$$f(x)=2x^2-4x-6$$

Tout d'abord, on précise des valeurs de *a*, *b* et *c*. On a : $a=2$; $b=-4$ et $c=-6$.

On calcule $\alpha=\frac{-b}{2a}=-\frac{-4}{2\times 2}=\frac{4}{4}=1$. Donc $\alpha=1$

Puis, on calcule $\beta=f(\alpha)=f(1)=2\times 1^2-4\times 1-6=-8$. Donc $\beta=-8$

D'où la *forme canonique* : $f(x)=2(x-1)^2-8$.

1.6) Sens de variation d'une fonction polynôme du second degré

Théorème n°3

Soit *f* une fonction polynôme du second degré définie par : $f(x)=ax^2+bx+c$ et dont la courbe représentative dans un repère orthonormé est la parabole de sommet S(α ; β). Alors :

Si *a* > 0, la parabole *dirige ses branches vers le haut* ; donc la fonction *f* est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha\,;+\infty[$.

Si *a* < 0, la parabole dirige ses branches vers le bas ; donc la fonction *f* est strictement croissante sur $]-\infty\,;\alpha[$ et strictement décroissante sur $]\alpha\,;+\infty[$.

Tableaux de variation :

Si *a* > 0

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↘	β	↗

Si *a* < 0

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↗	β	↘

Exemple 1.

On considère la fonction *f* définie sur **R** par : $f(x)=2x^2-8x+6$, dont la représentation graphique dans un repère orthonormé, est une prabole P de sommet S.

1°) Déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole.

2°) En déduire la forme canonique de la fonction *f* .

3°) Déterminer une factorisation de $f(x)$.

Exemple 2.

Même exercice avec la fonction *g* définie sur **R** par : $g(x)=-3x^2-6x+9$.

Exemple 3.

Même exercice avec la fonction *h* définie sur **R** par : $g(x)=3x^2+12x+12$.

II. Résolution de l’équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$

2.1) Techniques de résolution

Théorème 3.

Pour résoudre l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$, avec $a\neq 0$, on calcule un nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ (Δ se lit « *Delta* ») et on distingue trois cas :

1[er] cas : $\Delta > 0$. L'équation admet ***deux solutions réelles distinctes*** :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2[ème] cas : $\Delta = 0$. L'équation admet *une seule solution réelle* : $x_0=\frac{-b}{2a}$.

On dit que x_0 est ***une solution double*** ;

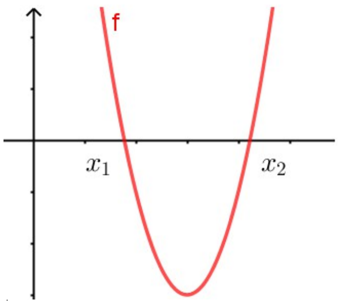
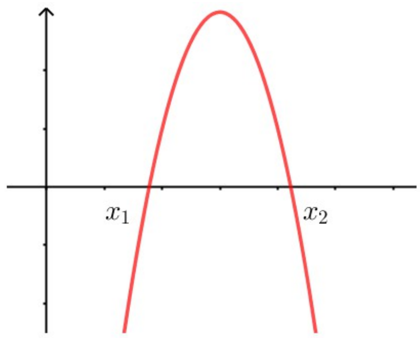
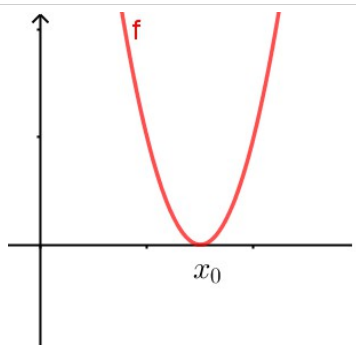
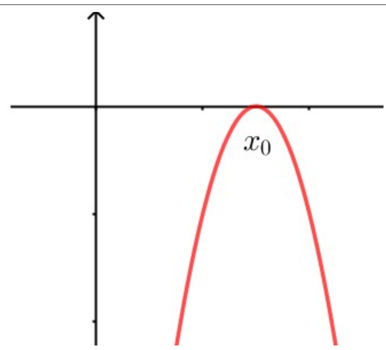
3[ème] cas : $\Delta < 0$. L'équation n'admet *aucune solution réelle*.

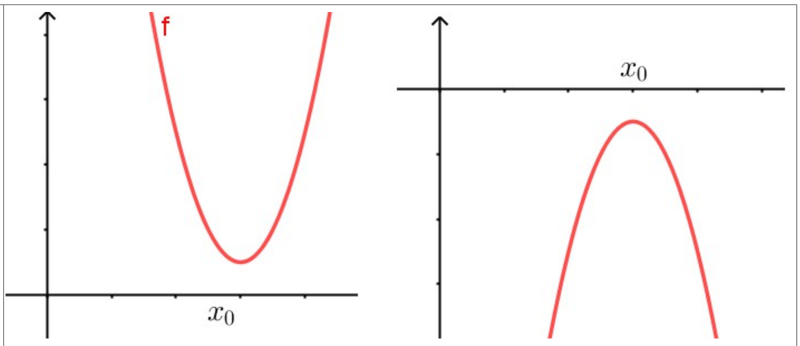
$\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle le ***discriminant*** du trinôme du second degré.

Explication :

On considère la fonction du second degré définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ représentée par la parabole C_f dans un repère orthonormé (O, I, J).

Résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$ revient à résoudre l'équation $f(x)=0$, c'est-à-dire à déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses. On distingue alors trois cas.

i) C_f coupe l'axe des abscisses en deux points distincts d'abscisses respectives x_1 et x_2 (ce qui correspond à $\Delta > 0$).		
ii) C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point, donc au sommet de la parabole, d'abscisse $\alpha = x_0$ (ce qui correspond à $\Delta = 0$).		

iii) C_f ne coupe l'axe des abscisses en aucun point, donc C_f est entièrement située au-dessus ou entièrement située en dessous de l'axe desv abscisses (ce qui correspond à $\Delta < 0$).	

<u>Exemples</u>.

Résoudre les équations suivantes :

$$(1)\ \ 2x^2-3x+1=0\ \ ;\ \ (2)\ \ 4x^2-12x+9=0\ \text{ et }\ (3)\ \ 2x^2+2x+3=0.$$

<u>Corrigé</u>.

1°) Résolution de l'équation (1) $2x^2-3x+1=0$, avec $a = 2$, $b = -3$ et $c = +1$.

<u>1ère étape</u> : *<u>Je calcule le discriminant</u>* Δ.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= (-3)^2-4\times2\times1\\ &= 9-8\end{aligned}$$

$$\Delta=1$$

<u>2ème étape</u> : *<u>Je regarde le signe de</u>* Δ ou si $\Delta=0$ *et j'applique le théorème* :

Comme $\Delta>0$, l'équation (1) admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times2} = \frac{3-1}{4} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times2} = \frac{3+1}{4}$$

D'où : $x_1=\frac{1}{2}$ et $x_2=1$.

<u>3ème étape</u>. <u>Conclure</u>.

L'équation (1) admet deux solutions. Donc : $S = \{\ \frac{1}{2}\ ;1\}$.

2°) Résolution de l'équation (2) $4x^2-12x+9=0$ avec $a = 4$, $b = -12$ et $c = +9$.

<u>1ère étape</u> : *<u>Je calcule le discriminant</u>* Δ.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= (-12)^2-4\times4\times9\end{aligned}$$

$$\Delta=0$$

<u>2ème étape</u> : Ici $\Delta=0$. *J'applique le théorème* :

Comme $\Delta=0$, l'équation (1) admet une seule solution double.

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{-b}{2a} \\ &= \frac{-(-12)}{2\times 4} \\ &= \frac{12}{8} \end{aligned}$$

D'où : $x_0=\frac{12\div 4}{8\div 4}=\frac{3}{2}$

3ème étape. Conclure.

L'équation (2) admet une seule solution. Donc : S = { $\frac{3}{2}$ }.

3°) Résolution de l'équation (3) $2x^2+2x+3=0$ avec $a = 2$, $b = 2$ et $c = 3$.

1ère étape *: Je calcule le discriminant* Δ.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2-4ac \\ &= 2^2-4\times 2\times 3 \\ &= 4-24 \end{aligned}$$

$\Delta=-20$

2ème étape : Ici $\Delta<0$. *J'applique le théorème* :

Comme $\Delta<0$, l'équation (3) n'admet aucune solution.

3ème étape. Conclure.

L'équation (3) n'admet aucune solution. L'ensemble des solutions est vide : S = ∅.

2.2) Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Théorème 5.

On considère un trinôme du second degré $f(x)=ax^2+bx+c$ (avec $a\neq 0$) et Δ son discriminant, alors pour factoriser ce trinôme, on distingue trois cas :

1er cas : $\Delta > 0$. Le trinôme se factorise : $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$;
où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme du second degré f.

2ème cas : $\Delta = 0$. Le trinôme se factorise : $f(x)=a(x-x_0)^2$; avec $x_0=\frac{-b}{2a}$

3ème cas : $\Delta < 0$. Le trinôme ne se factorise pas (sauf par une constante).

Exemples.

Factorisez les expressions suivantes lorsque cela est possible :

(1) $f(x)=2x^2-3x+1$; (2) $g(x)=4x^2-12x+9$ et (3) $h(x)=2x^2+2x+3$.

Corrigé

1°) *Factorisation de* $f(x)=2x^2-3x+1$

D'après le calcul de l'exercice précédent : $\Delta = 1$. Comme $\Delta > 0$, l'équation $f(x)=0$

admet deux solutions distinctes : $x_1=\frac{1}{2}$ et $x_2=1.$ Et comme $a = 2$ donc $f(x)$ se factorise comme suit : $\boxed{f(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1).}$

2°) *Factorisation de* $g(x)=4x^2-12x+9$

D'après le calcul de l'exercice précédent : $\Delta = 0$. Donc l'équation $g(x)=0$ admet une seule solution double : $x_0=\frac{3}{2}$ Et comme $a = 4$ donc $g(x)$ se factorise comme suit : $\boxed{g(x)=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2.}$

2°) *Factorisation de* $h(x)=2x^2+2x+3.$

D'après le calcul de l'exercice précédent : $\Delta < 0$. Donc l'équation $h(x)=0$ n'admet aucune solution. Donc $h(x)$ ***ne se factorise pas***.

2.3) Signe du trinôme

On considère la fonction du second degré définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ représentée par la parabole C_f dans un repère orthonormé (O, I, J).

Déterminer le signe du trinôme $f(x)$, revient à déterminer les intervalles sur lesquels $f(x)\geqslant 0$ et les intervalles sur lesquels $f(x)\leqslant 0$.

On commence par résoudre l'équation $f(x)=0$, puis suivant le signe de a, déterminer le sens des branches de la parabole, puis en déduire que $f(x)$ est toujour de même signe que a, à l'extérieur des racines lorsqu'elles existent.

Théorème 6.

> Un trinôme du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$ (avec $a\neq 0$) est toujours du signe de a, à l'extérieur des racines (lorsqu'elles existent). En particulier si $\Delta < 0$, le trinôme garde un signe constant, le signe de a, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Exemple.

Déterminez le signe du trinôme du second degré défini par: $f(x)=2x^2-3x+1$

On procède en trois étapes :

1ère étape : On résout l'équation $f(x)=0.$

Pour cela on calcule le discriminant Δ. Ici, $\Delta = 1$. Donc l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2=1.$ La courbe C_f coupe deux fois l'axe des abscisses en $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$.

2ème étape : On détermine le sens des branches suivant le signe de a.

Ici $a = 2$, donc a > 0. La parabole dirige ses branches vers le haut. Donc la fonction f est strictement positive sur $]-\infty\,;x_1[$, nulle en x_1, strictement négative sur $]x_1\,;x_2[$, nulle en x_2 et, enfin, strictement positive sur $]x_2\,;+\infty[$.

On résume ces résultats dans un ***tableau de signe*** de la fonction trinôme du second degré, avec les valeurs, comme suit :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
Signe de $f(x)$		+	0	–	0	+	

2.4) Résolution d'une inéquation du second degré

Pour résoudre une inéquation du second degré, on cherche le signe du trinôme du second degré associé.

Exemple. *Résoudre l'inéquation* $-2x^2+3x+5\geqslant 0$.

On commence par calculer le discriminant :

$$\Delta = 3^2-4\times(-2)\times 5$$

$$\Delta = 9+40$$

$$\Delta = 49 > 0$$

Le trinôme admet donc deux solutions réelles distinctes : $x_1 = -1$ et $x_2 = 5/2$.

Dans notre cas : $a = -2$ est négatif.

Or, on sait qu'un trinôme du second degré est toujours du signe de a, à l'extérieur des racines. Donc, il est positif entre les racines. Par conséquent,

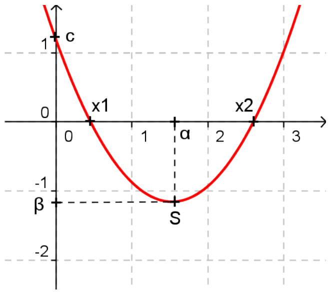
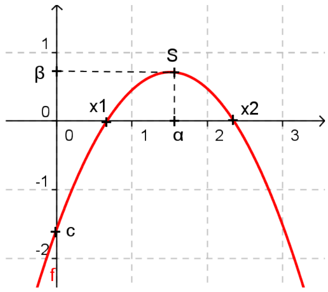
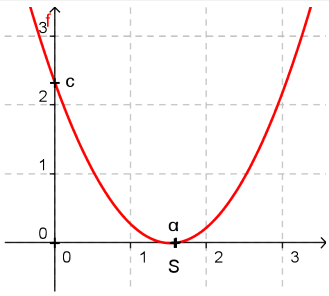
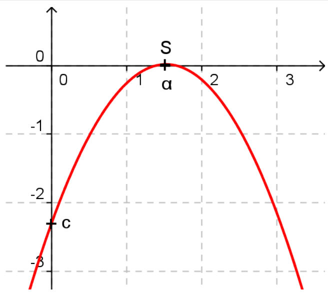
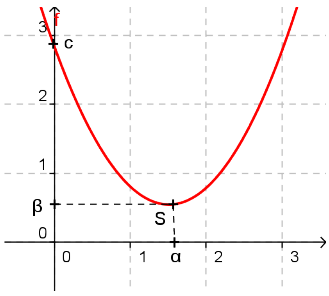
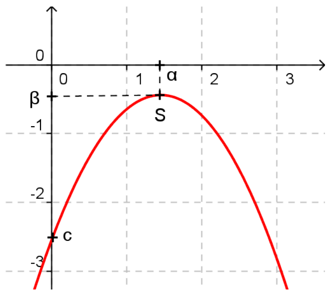
$$-2x^2+3x+5\geqslant 0 \text{ si et seulement si } -1\leqslant x\leqslant \frac{5}{2} \ .$$

Conclusion. L'ensemble des solutions de cette inéquation est $S=\left[-1\,;\frac{5}{2}\right]$.

Remarque : Bien sûr, on aurait pu, avec la même technique, chercher les racines du trinôme et fait un tableau de signes, comme en classe de seconde.

2.5) Tableau récapitulatif des résultats

On considère un trinôme du second degré défini par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) et Δ son discriminant. Alors, nous pouvons résumer les résultats précédents de la manière suivante :

Signe de **Δ**	Racines & Factorisation	$\boldsymbol{a > 0}$ (*vers le haut*)	$\boldsymbol{a < 0}$ (*vers le bas*)
$\boldsymbol{\Delta > 0}$	Deux racines réelles $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ Signe de $f(x)$ →	 $+$ $\boldsymbol{x_1}$ $-$ $\boldsymbol{x_2}$ $+$	 $-$ $\boldsymbol{x_1}$ $+$ $\boldsymbol{x_2}$ $-$
$\boldsymbol{\Delta = 0}$	Une racine réelle double: $x_1 = \frac{-b}{2a}$ $f(x) = a(x-x_0)^2$ Signe de $f(x)$ →	 $+$ $\boldsymbol{x_0}$ $+$	 $-$ $\boldsymbol{x_0}$ $-$
$\boldsymbol{\Delta < 0}$	Pas de racine réelle. Pas de factorisation. Signe de $f(x)$ →	 $f(x) > 0$ pour tout x	 $f(x) < 0$ pour tout x