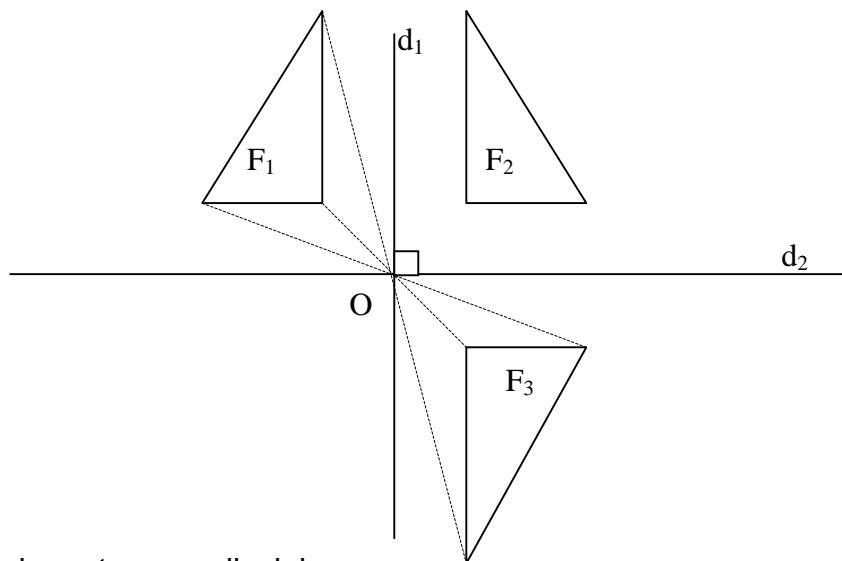


Chapitre 2

Une nouvelle symétrie : La symétrie centrale

1. Activité

Une double symétrie axiale :



Les 2 axes d_1 et d_2 sont perpendiculaires.

La figure F_2 est symétrique de F_1 par rapport à l'axe d_1 .

La figure F_3 est symétrique de F_2 par rapport à l'axe d_2 .

La figure F_3 s'obtient à partir de F_1 en effectuant « un demi-tour autour du point O ».

Les deux figures symétriques F_1 et F_3 sont superposables.

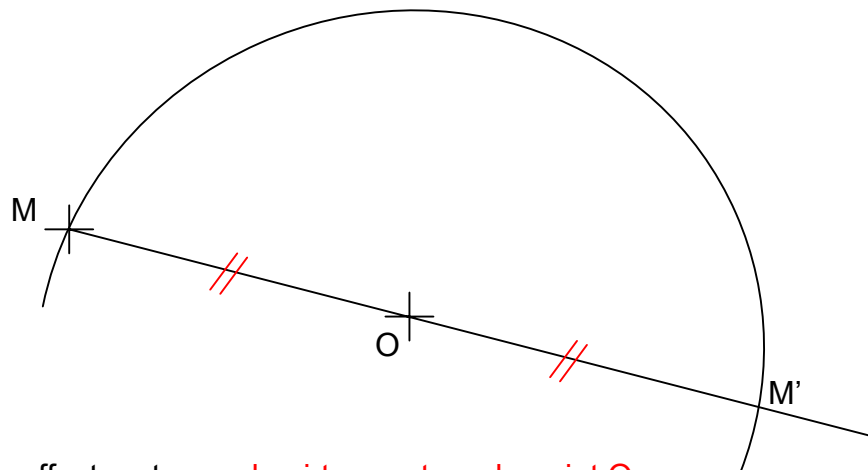
2. Symétrie d'un point

a) Définitions

On se donne deux points O et M . On dit que le point M' est **le symétrique** de M par rapport au point O , si O est le milieu de $[MM']$. On dit aussi que les points M et M' sont **symétriques par rapport au point O** .

Une symétrie par rapport à un point s'appelle **une symétrie centrale** de **centre O** .

On dit aussi que **M' est l'image de M** par la symétrie centrale de centre O .

a) Construction à la règle et au compas du symétrique d'un point

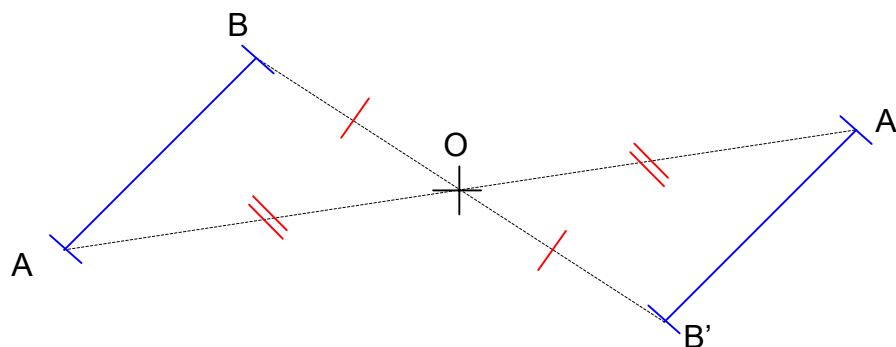
M' s'obtient en effectuant un « demi-tour autour du point O ».

Remarques:

On considère une symétrie centrale de centre O.

1°) Le seul point qui a pour symétrique lui-même est le point O. On dit que **le point O est invariant** par la symétrie de centre O. O s'appelle aussi **le centre de symétrie**.

2°) Si le point B est le symétrique de A par rapport à O, alors A aussi est le symétrique de B par rapport à O.

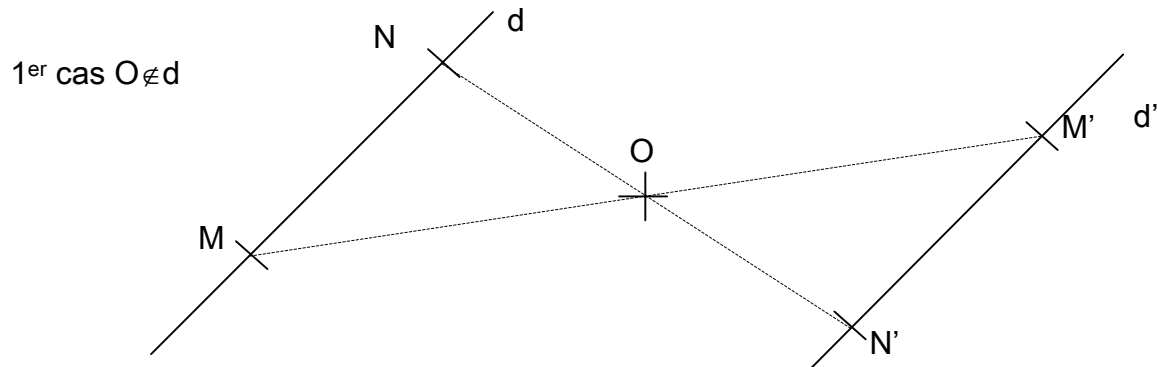
2. Symétrique d'un segment**Propriété fondamentale de la symétrie centrale :****Propriété n°1**

L'image d'un segment par rapport à un point O est un segment parallèle et de même longueur. De plus, l'image du milieu d'un segment est le milieu du segment image.

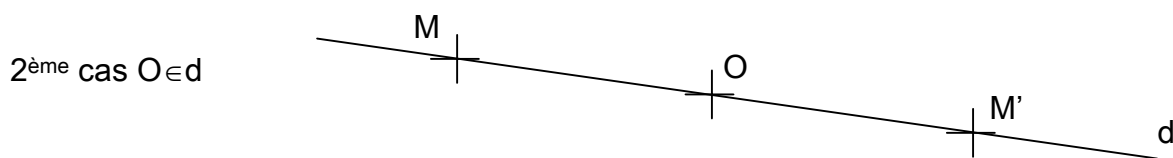
$$(AB) \parallel (A'B') \text{ et } AB = A'B'$$

2. Symétrique d'une droite

Soit d une droite et O un point. On distingue deux situations :



Pour construire le symétrique d'une droite d par rapport à un point O , $O \notin d$, il suffit de choisir deux points distincts M et N de d et de construire le symétrique du segment $[MN]$ puis le prolonger pour obtenir d' .

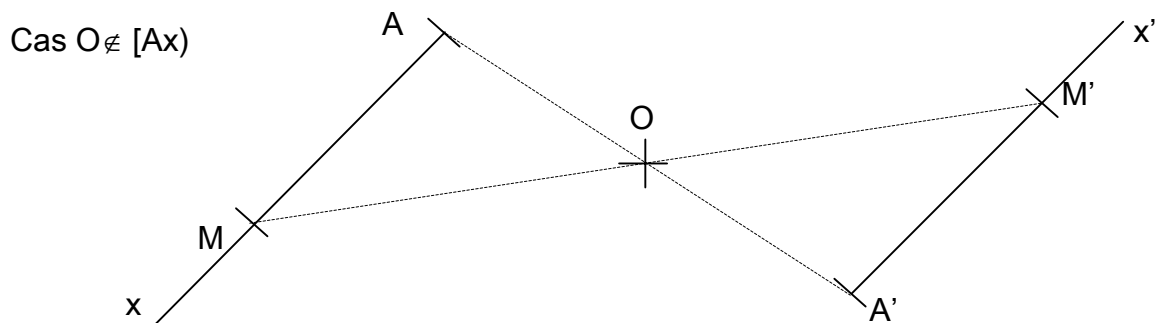


Propriété n°2

- Si $O \notin d$, alors l'image de la droite d par la symétrie centrale de centre O est une droite d' strictement parallèle à d : $d' \parallel d$.
- Si $O \in d$, alors l'image de tout point de d par rapport à O est encore un point de d .
On dit que la droite est globalement invariante par la symétrie de centre O .

Conséquence : Si trois points sont alignés (ils appartiennent à une même droite d), alors leurs symétriques sont alignés (ils appartiennent à la même droite d').

3. Symétrique d'une demi-droite



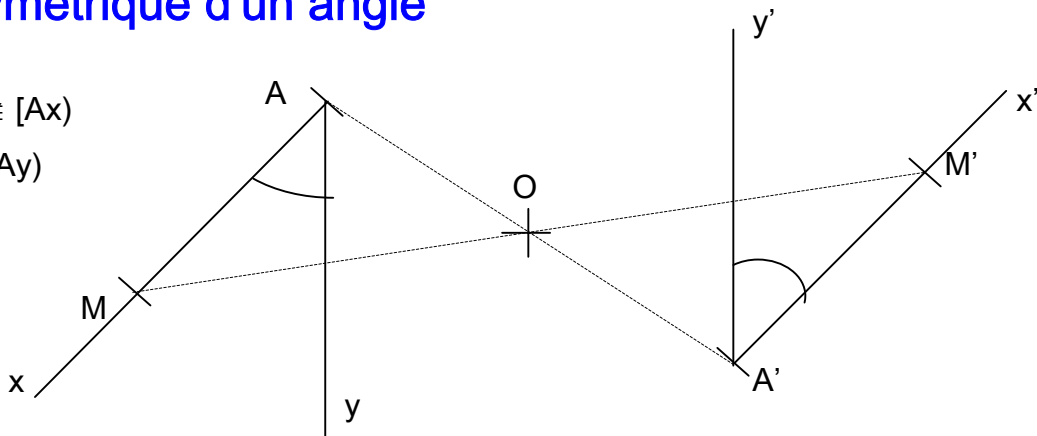
Pour construire le symétrique d'une demi-droite $[Ax)$ par rapport à un point O , $O \notin d$, il suffit de construire le symétrique A' de A puis choisir un point M distinct de A et de construire son symétrique puis prolonger pour obtenir $[A'x')$.

Propriété n°3

L'image d'une demi-droite $[Ax)$ par la symétrie centrale de centre O est une demi-droite $[A'x')$ parallèle à $[Ax)$ et de sens contraire.

4. Symétrique d'un angle

Cas $O \notin [Ax)$
et $O \notin [Ay)$



Pour construire le symétrique d'un angle \widehat{xAy} par rapport à un point O , il suffit de construire le symétrique A' du sommet A puis choisir un point M distinct de A sur $[Ax)$ et de construire son symétrique par rapport à O puis prolonger.

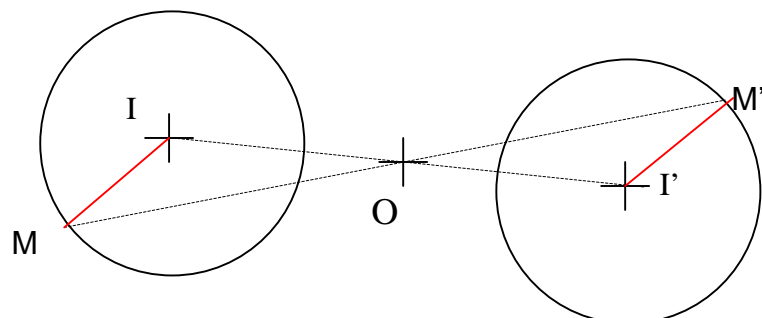
Propriété n°4

L'image d'un angle par une symétrie centrale de centre O est un angle de même mesure.

5. Symétrique d'un cercle

Soit C un cercle de centre I et de rayon r et O un point. Comme pour la droite, on distingue deux situations :

Cas $O \neq I$

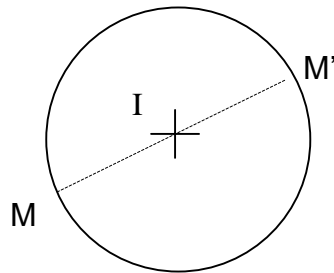


Pour construire le symétrique C' du cercle C , il suffit de construire le symétrique I' du point I par rapport à O puis reconstruire un cercle de centre I' et de même rayon r .

Propriété n°5

L'image d'un cercle de centre I et de rayon r par une symétrie centrale est un cercle de centre I' , symétrique de I et de même rayon.

2^{ème} cas : $O = I$.



Le symétrique de tout point M du cercle par rapport au centre I est un point M' de ce cercle « diamétralement opposé » à M . C'est-à-dire que $[MM']$ est un diamètre du cercle.

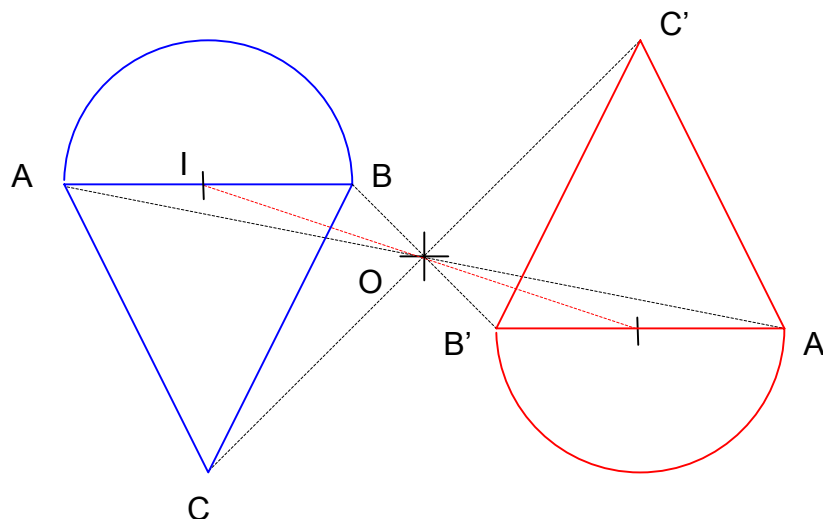
Propriété n°5bis

L'image d'un cercle de centre I et de rayon r par une symétrie centrale de centre O est un cercle de centre I' , symétrique de I et de même rayon.

6. Symétrique d'une figure

a) A la règle et au compas :

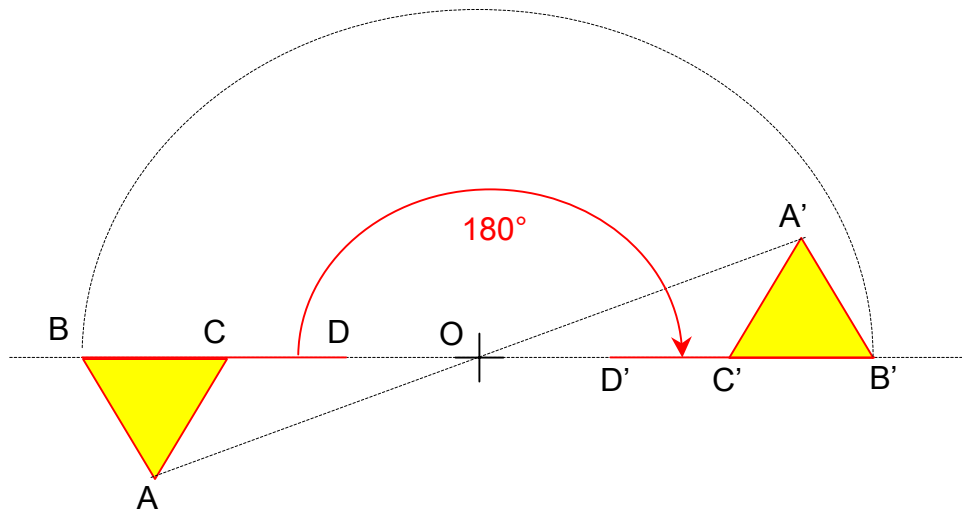
pour construire le symétrique d'une figure composée, il suffit de construire le symétrique de chaque sommet par rapport à O puis reconstruire la figure « à l'envers ».



Propriété n°6

L'image d'une figure par une symétrie centrale est une figure superposable et de sens inverse. La symétrie centrale est une opération « renversante ».

Remarques : Construire l'image d'une figure par une symétrie centrale de centre O, revient à la faire **tourner d'un demi-tour** autour du centre O.



b) Construction avec des carreaux

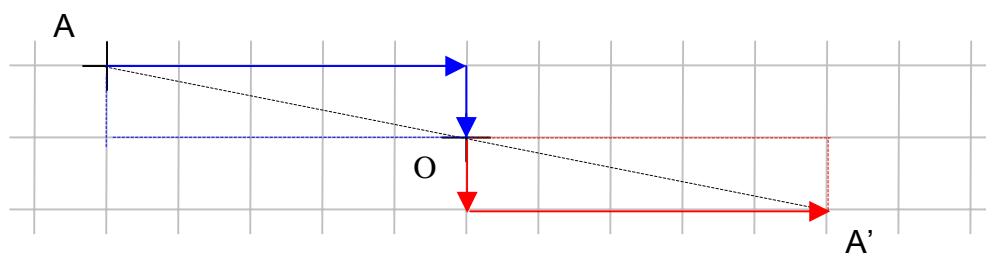
Pour construire le symétrique suivant les carreaux, on fait appel à **une tortue** qui se déplace uniquement horizontalement ou verticalement (comme sur une grille) : Elle a quatre possibilités : AV = Avancer, RE = Reculer, MO = Monter et DE = Descendre.

Pour se déplacer du point A au point O :

j'avance de 5 carreaux AV (5) et je descends de 1 carreau DE(1).

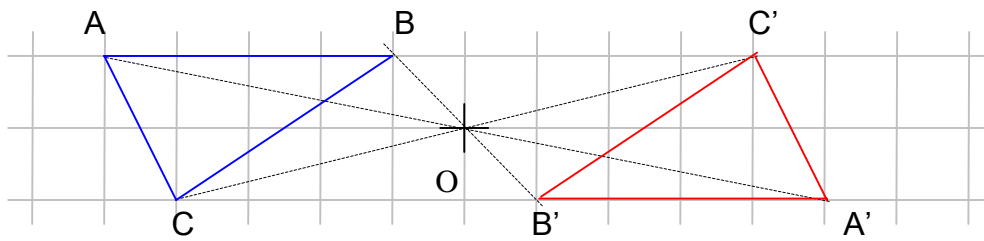
Donc pour se déplacer du point O au point A', symétrique de A par rapport à O :

je descends de 1 carreau DE(1) puis j'avance de 5 carreaux AV (5).



2ème manière : [AO] est la diagonale d'un rectangle bleu (suivant les carreaux) Alors [OA'] est la diagonale d'un 2ème rectangle rouge. Les points A, O et A' sont alignés !

On obtient le symétrique du triangle ABC par rapport au centre O suivant les carreaux :

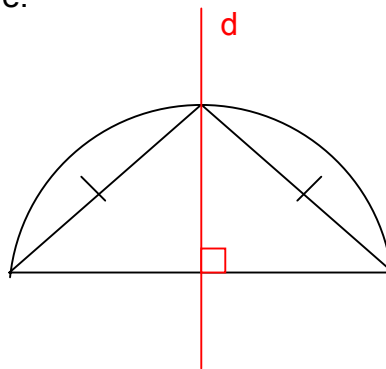


7. Éléments de symétrie d'une figure

Ce sont les **axes de symétrie** et les **centres de symétrie** d'une figure.

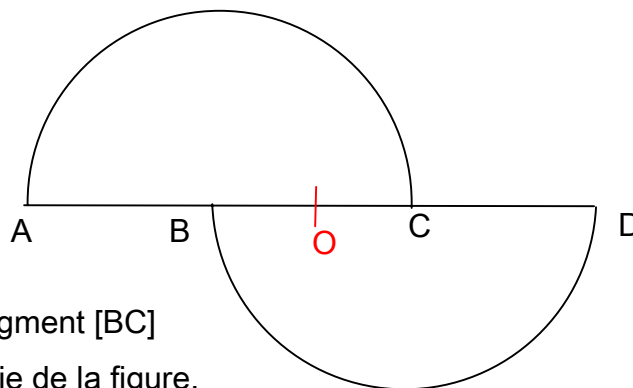
a) Axe de symétrie

Définition 1 : On dit qu'une figure admet **une droite d** comme **axe de symétrie** si le symétrique de chaque point de la figure par rapport à cette droite est un point qui appartient encore à cette figure.



b) Centre de symétrie

Définition 2 : On dit qu'une figure admet **un point O** comme **centre de symétrie** si le symétrique de chaque point de la figure par rapport à O est un point qui appartient encore à cette figure.



Le point O, milieu du segment [BC]
Est un centre de symétrie de la figure.

8. Figures symétriques

Voici un tableau qui donne les éléments de symétrie des figures classiques de géométrie. Faire les dessins et construire les éléments de symétrie.

Nom	Centres	Axes
Le segment	1 centre	2 axes : lui-même et sa médiatrice
La droite	Une infinité	Une infinité : Elle-même et toutes les droites qui lui sont perpendiculaires
Le cercle	1 centre	Une infinité : toutes les droites qui passent par le centre du cercle
Le triangle isocèle	0 centre	1 axe : la médiatrice de la base
Le triangle équilatéral	0 centre	3 axes : les médiatrices des trois côtés
Le rectangle	1 centre	2 axes : les médiatrices des côtés
Le losange	1 centre	2 axes : les deux diagonales
Le carré	1 centre	4 axes : les 2 médiatrices et les 2 diagonales
Pentagone régulier	0 centre	5 axes : Les médiatrices des 5 côtés
Hexagone régulier	1 centre	6 axes : 3 médiatrices et 3 diagonales
Polygone régulier avec un nombre impair de côtés : $2n+1$	0 centre	$2n+1$ axes : Les médiatrices des côtés
Polygone régulier avec un nombre pair de côtés : $2n$	1 centre	$2n$ axes : Les n médiatrices et les n diagonales