Chapitre 5

Puissances d'un nombre relatif

I. Puissances de 10

I.1. Puissance de 10 d'exposant entier positif

On sait que

$$10^2 = \underbrace{10 \times 10}_{\text{2 facteurs}} = 100 \quad \text{deux zéros}$$

$$10^3 = \underbrace{10 \times 10 \times 10}_{\text{3 facteurs}} = 1000 \quad \text{trois zéros}$$

$$10^4 = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10}_{\text{4 facteurs}} = 10000 \quad \text{quatre zéros}$$

Définition 1 :

Plus généralement, si n est un entier positif, alors 10^n désigne le produit de n facteurs tous égaux à 10. Ce qui donne :

(D1)

$$\boxed{10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots\ldots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = 1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ zéros}}}$$

Lire « *10 élevé à la puissance n* » ou « *10 à la puissance n* » ou encore « *10 exposant n* ».

On dit que n est **l'exposant** de la puissance de 10.

Remarque : Pour passer d'une puissance de 10 à une puissance d'exposant supérieur, on multiplie par 10. Dans l'autre sens, on divise. En particulier :

$10^1 = \frac{10^2}{10} = \frac{100}{10} = 10$ et $10^0 = \frac{10^1}{10} = \frac{10}{10} = 1$.

Ce qui donne : $\boxed{10^1 = 10}$ et $\boxed{10^0 = 1}$.

I.2. Puissance de 10 d'exposant entier négatif

On sait que

$$\underbrace{0}_{\text{1 zéro}},1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}$$

$$\underbrace{0,0}_{\text{2 zéros}}1 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

$$\underbrace{0,00}_{\text{3 zéros}}1 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$$

$$\underbrace{0,000}_{\text{4 zéros}}1 = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$$

Définition 2 :

Plus généralement, si n est un entier positif, alors $(-n)$ est un nombre entier négatif. 10^{-n} désigne l'inverse de 10^n. Ce qui donne :

(D2) $\boxed{10^{-n}=\dfrac{1}{10^n}=\underbrace{0,0...01}_{n \text{ zéros}}}$ le 1 est situé à la $n^{\text{ème}}$ position après la virgule.

Exemples : $10^{-5}=\dfrac{1}{10^5}=\dfrac{1}{100\,000}=\underbrace{0,00001}_{5 \text{ zéros}}$ où le 1 est en 5ème position.

Un cent millionième $=\dfrac{1}{100\,000\,000}=\dfrac{1}{10^8}=10^{-8}$.

I.3. Propriétés

Soient n et p deux entiers relatifs quelconques. Alors on a

(P1) : $10^n \times 10^p = 10^{n+p}$

(P2) : $\dfrac{10^n}{10^p}=10^{n-p}$

(P3) : $(10^n)^p = 10^{n\times p}$

Démonstrations

(P1) : $10^n \times 10^p = \underbrace{\underbrace{10\times10\times...\times10}_{n \text{ facteurs}}\times\underbrace{10\times10\times...\times10}_{p \text{ facteurs}}}_{n+p \text{ facteurs}} = \underbrace{10\times10\times...\times10}_{n+p \text{ facteurs}} = 10^{n+p}$.

(P2) : $\dfrac{10^n}{10^p}=\dfrac{\overbrace{10\times10\times...\times10\times\cancel{10}\times\cancel{10}\times...\times\cancel{10}}^{n \text{ facteurs}}}{\underbrace{\cancel{10}\times\cancel{10}\times...\times\cancel{10}}_{p \text{ facteurs}}}=\overbrace{10\times10\times...\times10}^{n-p \text{ facteurs}}=10^{n-p}$.

(P3) : $(10^n)^p = \underbrace{10^n\times10^n\times...\times10^n}_{p \text{ facteurs}} = 10^{\overbrace{n+n+...+n}^{p \text{ termes}}} = 10^{n\times p}$.

I.4. Ecriture d'un nombre décimal à l'aide d'une puissance de 10

Propriété n°4

Soit n un nombre entier positif quelconque.

– Multiplier un nombre décimal par 10^n, revient à **décaler la virgule de n rangs vers la droite** (en complétant par des zéros si nécessaire).

– Multiplier un nombre décimal par 10^{-n}, revient à **décaler la virgule de n rangs vers la gauche** (en complétant par des zéros si nécessaire).

– Diviser par 10^n revient à multiplier par 10^{-n} et diviser par 10^{-n} revient à multiplier par 10^n.

Exemples

38,75 x 10^3 = 38750 et 38,75 : 10^3 = 0,03875.

Propriété n°5

> Tout nombre décimal N non nul peut s'écrire d'**une infinité de manières** sous la forme d'un produit d'un (autre) nombre décimal par une puissance de 10 comme suit : N = a x 10 ^{p} où a est un nombre décimal et p un entier relatif.

Exemple :

$$N = 35000$$
$$N = 35 \times 1000 = 35 \times 10^3$$
$$N = 350 \times 100 = 350 \times 10^2$$
$$N = 3,5 \times 10000 = 3,5 \times 10^4$$
$$N = 0,35 \times 100000 = 0,35 \times 10^5$$
$$N = ...$$

I.5. Notation scientifique

Propriété n°6

> Tout nombre décimal N non nul peut s'écrire d'une <u>manière unique</u> sous la forme d'un produit d'un nombre décimal « **a** » dont la distance à zéro est comprise entre 1 et 10 et une puissance de 10 comme suit : N = a x 10 ^{p} où a est un nombre décimal n'ayant qu'**un seul chiffre différent de zéro avant la virgule** et p un entier relatif.

Exemples :

Nombre	Ecriture scientifique
35700000	$3,57 \times 10^7$
0,000122	$1,22 \times 10^{-4}$

Recherche pratique d'une écriture scientifique :

$N = 352 \times 10^7$ On cherche d'abord la n.s. du 1er nombre 352 =3,52 x 10^2

$N = 3,52 \times \underbrace{10^2 \times 10^7}$ puis on regroupe les puissances de 10.

$N = 3,5 \times 10^{2+7}$

$N = 3,52 \times 10^9$ n.s. de N.

I.6. Opérations et puissances de 10

Propriété n°6

1°) Produit de puissances : $(a\times10^{n})\times(b\times10^{p}) = ab\times10^{n+p}$

2°) Quotient de puissances : $\dfrac{a\times10^{n}}{b\times10^{p}}\times = \dfrac{a}{b}\times\dfrac{10^{n}}{10^{p}} = \dfrac{a}{b}\times10^{n-p}$

3°) Somme et différence de puissances : $a\times10^{n}+b\times10^{p} = a\times\underbrace{10^{n-p}\times10^{p}}_{\text{clé du problème}}+b\times10^{p}$

$= (a\times10^{n-p}+b)\times10^{p}$ (où n > p)

La méthode consiste à mettre en facteur la puissances de 10 ayant le plus petit exposant.

Exemples :

$P = (3\times10^{5})\times(5\times10^{12})$

$P = (3\times5)\times(10^{5}\times10^{12})$

$P = 15\times10^{5+12}$

$P = 15\times10^{17}$

$P = 1,5\times10^{1}\times10^{17}$

$P = 1,5\times10^{18}$

$Q = \dfrac{144\times10^{15}}{50\times10^{9}}$

$Q = \dfrac{144}{50}\times\dfrac{10^{15}}{10^{9}}$

$Q = 2,88\times10^{15-9}$

$Q = 2,88\times10^{6}$

$S = 31\times\underbrace{10^{15}}_{\text{On décompose}}+297\times10^{13}$

$S = \underbrace{31\times10^{2}}\times10^{13}+297\times10^{13}$

$S = 3100\times10^{13}+297\times10^{13}$

$S = (3100+297)\times10^{13}$

$S = 3397\times10^{13}$

$S = 3,397\times\underbrace{10^{3}\times10^{13}}_{\text{On regroupe}}$

$S = 3,397\times10^{16}$ n.s. de S

Pour additionner des nombres écrits à l'aide de puissances de 10, on met en facteur la puissance de 10 ayant le plus petit exposant.

Exemple type Brevet :

Calculer A et donner le résultat en notation scientifique avec A = $\dfrac{35\times10^{5}\times24\times10^{3}}{15\times(10^{-3})^{2}}$

$A = \dfrac{35\times10^{5}\times24\times10^{3}}{15\times(10^{-3})^{2}}$

$A = \dfrac{35\times24}{15}\times\dfrac{10^{5}\times10^{3}}{(10^{-3})^{2}}$ on sépare les facteurs par type

$A = \dfrac{7\times\cancel{5}\times\cancel{3}\times8}{\cancel{5}\times\cancel{3}}\times\dfrac{10^{5}\times10^{3}}{(10^{-3})^{2}}$ on calcule et on simplifie chaque facteur

$A = 56\times\dfrac{10^{5}\times10^{3}}{10^{-6}}$

$A = 56\times\dfrac{10^{8}}{10^{-6}} = 56\times10^{8-(-6)} = 56\times10^{14}$

$A = 5,6\times10^{1}\times10^{14}$

$A = 5,6\times10^{15}$ n.s.

II. Puissances d'un nombre relatif :

II.1. Puissances d'exposant entier positif :

Définition :

Si n est un nombre entier supérieur ou égal à 2 et a un nombre relatif, alors a^n désigne le produit de n facteurs tous égaux à a. Ce qui donne :

$\boxed{a^n = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \text{ facteurs}}}$. De plus : $\boxed{a^1 = a}$ et si $a \neq 0$, alors $\boxed{a^0 = 1}$. 0^0 n'est pas défini.

a^n se lit « a *élevé à la puissance n* » ou « a *à la puissance n* » ou encore « a *exposant n* ».

On dit que n est **l'exposant** de la puissance de a.

Exemples :

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

$(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$

II.2. Puissances d'exposant entier négatif :

Définition :

Soit *n* un entier positif , don (–n) est négatif. Soit a un nombre relatif non nul. $\boxed{a \neq 0}$. Alors Le nombre a^{-n} est égal à l'inverse de a^n.

Autrement dit, pour tout nombre relatif $a \neq 0$: $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

Exemples :

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$$

$$(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$$

II.3. Propriétés

Soient a et b deux nombres relatifs non nuls ($a \neq 0$ et $b \neq 0$) et n et p deux entiers relatifs quelconques. Alors on a

(P1) : $a^n \times a^p = a^{n+p}$ (P2) : $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ $(a \neq 0)$ (P3) : $(a^n)^p = a^{n \times p}$

(P4) : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ (P5) : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$

Démonstrations pour n et p > 0 :

(P1) : $a^n \times b^p = \underbrace{\underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \text{ facteurs}} \times \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{p \text{ facteurs}}}_{n+p \text{ facteurs}} = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n+p \text{ facteurs}} = a^{n+p}$.

(P2) : $\dfrac{a^n}{a^p} = \dfrac{\overbrace{a \times a \times ... \times a \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times ... \times \cancel{a}}^{n \text{ facteurs}}}{\underbrace{\cancel{a} \times \cancel{a} \times ... \times \cancel{a}}_{p \text{ facteurs}}} = \overbrace{a \times a \times ... \times a}^{n-p \text{ facteurs}} = a^{n-p}$.

(P3) : $(a^n)^p = \underbrace{a^n \times a^n \times ... \times a^n}_{p \text{ facteurs}} = a^{\overbrace{n+n+...+n}^{p \text{ termes}}} = a^{n \times p}$.

(P4) : $(a \times b)^n = \underbrace{(ab) \times (ab) \times ... \times (ab)}_{n \text{ facteurs } (ab)} = (\underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \text{ facteurs}}) \times (\underbrace{b \times b \times ... \times b}_{n \text{ facteurs}}) = a^n \times b^n$

(P5) : $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} \times ... \times \dfrac{a}{b}}_{n \text{ facteurs}} = \dfrac{\overbrace{a \times a \times ... \times a}^{n \text{ facteurs}}}{\underbrace{b \times b \times ... \times b}_{n \text{ facteurs}}} = \dfrac{a^n}{b^n}$

II.4. Puissances et opérations

Ordre de priorité des opérations

- Dans une suite de calculs sans parenthèses, les puissances sont prioritaires par rapport à toutes les opérations.
- Dans une suite de calculs, on effectue les opérations dans l'ordre suivant :
  1°) Opérations entre parenthèses ;
  2°) Les puissances
  3°) Les multiplications et les divisions ;
  4°) Les additions et les soustractions.

Exemples : 1°) Calculer :

$A = 5 \times 2^3 - 2^2 \times 7$
$= 5 \times 8 - 4 \times 7$
$= 40 - 28$
$A = 12$

$B = (5 \times 2)^3 - 2^2 \times 7$
$= 10^3 - 4 \times 7$
$= 1000 - 28$
$B = 972$

$C = 5 \times (2^3 - 2)^2 \times 7$
$= 5 \times (8-2)^2 \times 7 = 5 \times 6^2 \times 7$
$= 5 \times 36 \times 7 = 180 \times 7$
$C = 1260$

$D = 5 \times (2^3 - 2^2) \times 7$
$= 5 \times (8-4)^2 \times 7 = 5 \times 4^2 \times 7$
$= 5 \times 16 \times 7 = 80 \times 7$
$D = 560$

2°) Ecrire sous la forme d'une seule puissance :

E = $\dfrac{5^4 \times (5^2)^{-3}}{5^3} = \dfrac{5^4 \times 5^{2\times 3}}{5^3} = \dfrac{5^4 \times 5^{-6}}{5^3} = \dfrac{5^{4-6}}{5^3} = \dfrac{5^{-2}}{5^3} = 5^{-2-3} = 5^{-5}$

F = $\dfrac{6^3 \times 2^5 \times 3^3}{2^8 \times 3^{-2}} = \dfrac{(2\times 3)^3 \times 2^5 \times 3^3}{2^8 \times 3^{-2}} = \dfrac{2^3 \times 3^3 \times 2^5 \times 3^3}{2^8 \times 3^{-2}} = \dfrac{2^{3+5} \times 3^{3+3}}{2^8 \times 3^{-2}} = \dfrac{\cancel{2^8}}{\cancel{2^8}} \times \dfrac{3^6}{3^{-2}} = 3^{6-(-2)} = 3^8$.