

Chapitre 2

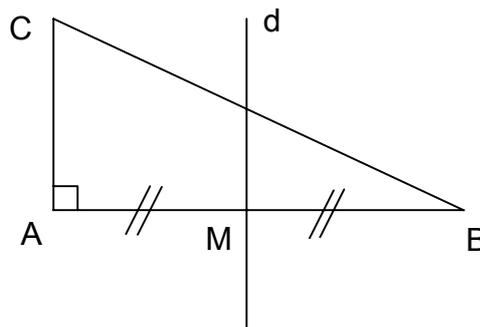
La démonstration en géométrie

1. Etude d'un exemple

Exemple : ABC est un triangle rectangle en A. Par le milieu M du côté [AB], on trace la droite d parallèle à (AC). Démontrer que la droite d est la médiatrice du segment [AB].

1^{er} réflexe : Faire une figure pour illustrer le problème.

« Une figure bien faite et bien codée est un problème à moitié résolu » Albert EINSTEIN.



2^{ème} réflexe : Ecrire **les hypothèses** : Ce sont les informations données (on dit simplement « **les données** ») du problème. (à souligner dans l'énoncé !)

Hypothèses :

- H1 : Le triangle ABC est rectangle en A ;
- H2 : Le point M est le milieu du segment [AB] ;
- H3 : $M \in d$;
- H4 : $d \parallel (AC)$.

Je dois démontrer que « d est **la médiatrice** du segment [AB] ». Je dois immédiatement penser à la définition et autres propriétés caractéristiques de **la médiatrice**.

Rédaction de la démonstration : « Je sais que... Or... Donc... »

« **Je sais que** » et je cite l'hypothèse ... , « **Or** » et je cite la propriété ou le théorème ...
 « **Donc** » et j'écris la conclusion...

Par hypothèse, **on sait que** d passe par le milieu M du segment $[AB]$.

On sait aussi que ABC est un triangle rectangle en A , donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires. Donc

$$(AB) \perp (AC)$$

De plus, on sait que $d \parallel (AC)$

Or, d'après la propriété qui dit que : « Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre », on peut affirmer que les droites (AB) et d sont perpendiculaires. Donc :

$$d \perp (AB)$$

Par conséquent, la droite d est perpendiculaire au segment $[AB]$ et passe par son milieu.

Conclusion : **La d est la médiatrice du segment $[AB]$.**

CQFD (Ce qu'il fallait démontrer !)

2. La démonstration

2.1. La méthode

1. Faire une figure et bien la coder pour illustrer le problème ;
2. Ecrire les hypothèses et ce qu'on doit démontrer ;
3. Bien observer la figure et chercher des pistes... ;
4. Faire des liens avec les règles et propriétés connues ;
5. Tirer des conséquences directes des hypothèses ;
6. Ordonner et enchaîner les idées ;
7. Enfin, rédiger la démonstration.

2.2. La rédaction

Faire un raisonnement logique

Raisonner = argumenter = justifier

Démontrer = prouver = justifier

Déduire = extraire une information = tirer une conséquence des données précédentes.

Chaque déduction est une conséquence d'une ou plusieurs hypothèses en utilisant une propriété. On dit : « **On sait que... , Or..., Donc...** »

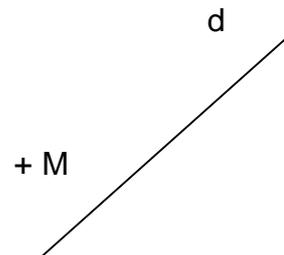
Pour cela, il faut citer un théorème ou réciter la propriété ou la règle utilisée.

Par exemple : D'après le théorème de Thalès, on a... ou d'après la propriété qui dit que : « ...je récite... », on peut affirmer que.

Pour conclure, on dit « Donc... » ou « Par conséquent,... ».

On utilise des mots de liaison « De plus,... », « Aussi,... », « Par ailleurs,... », « On sait aussi que... » etc...

2.2. Plusieurs types de propriétés



a) La négation ou « le contraire ».

Exemple le contraire de la propriété « $M \in d$ » est la propriété : « $M \notin d$ »

Si une propriété est vraie alors la propriété contraire est fausse. Et inversement !

Si une propriété est fausse alors la propriété contraire est vraie.

b) « SI...Une condition, ALORS... Une conclusion »

« SI la condition est vraie, ALORS la conclusion est vraie. »

Exemples « Si j'habite à Paris, ALORS j'habite en France » Vraie

- « Si un nombre entier est divisible par 9, alors il est divisible par 3. » Vraie

- « Si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles, alors c'est un parallélogramme » .

Faux ! car si la condition est vraie, la conclusion ne l'est pas nécessairement.

c) La réciproque :

C'est la propriété considérée « dans l'autre sens ». La réciproque de la propriété « Si A est vraie, alors B est vraie » est la propriété « Si B est vraie, alors A est vraie ».

En général, la réciproque d'une propriété n'est pas forcément vraie.

Exemple : La proposition « Si j'habite en France, alors j'habite à Paris » est fausse.

« Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors, il est équidistant des deux extrémités de ce segment » . Vraie. La propriété réciproque est « Si un point

est équidistant des deux extrémités d'un segment , **alors** il appartient à la médiatrice de ce segment ». **Vraie.**

Puisque *ça marche dans les deux sens*, on dit que **ces deux propriétés sont équivalentes.**

d) La contraposée :

« **SI** la conclusion est fausse, **alors** la condition est (forcément) fausse » car si elle était vraie, alors la conclusion serait vraie. Ce qui est impossible !

Exemples : « **Si** je n'habite pas en France, **alors** je n'habite pas à Paris ». **Vraie**

« **Si** un nombre entier n'est pas divisible par 3, **alors** il n'est pas divisible par 9 ». **Vraie**

e) Oui, mais :

– Il y a des propriétés qui sont vraies pour certaines valeurs et fausses pour d'autres :

« $2x + 3 = 9$ » est vraie pour $x = 3$ et fausse pour toutes les autres valeurs de x .

– Il y a d'autres propriétés qui sont vraies **pour toutes les valeurs de x .**

« $2x + 3x + 1 = 5x + 1$ ».